

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Двоеглазов Семен Иванович
Должность: Директор
Дата подписания: 30.06.2025 16:23:59
Уникальный программный ключ:
2cc3f5fd1c09cc1a69668dd98bc3717111a1a535



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Старооскольский филиал
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Российский государственный геологоразведочный университет имени
Серго Орджоникидзе»
(СОФ МГРИ)

Кафедра «Прикладной геологии, технологии поисков и разведки МПИ»

Кравцова О. С.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Часть I

Матрицы и определители

для студентов первого курса очной формы обучения всех
специальностей

Рекомендовано Ученым советом СОФ МГРИ

Старый Оскол, 2021

УДК 512.643
ББК 22.1
К 77

Составитель: кандидат технических наук О.С. Кравцова

Рецензент: к.п.н., доцент кафедры автоматизированных и информационных систем управления СТИ НИТУ «МИСиС» М.В. Мякотина

Кравцова О.С. Линейная алгебра. Часть I. Матрицы и определители: учебное пособие для студентов первого курса очной формы обучения всех специальностей. / О.С.Кравцова; СОФ МГРИ. – Старый Оскол: 2021. – 30 с.

Составлено в соответствии с утвержденной программой дисциплины «Линейная алгебра». В пособии даны методические указания и представлены решения задач по разделам курса «Линейной алгебры»: «Матрицы» и «Определители». Предназначено для студентов первого курса очной формы обучения всех специальностей. Утверждено и рекомендовано к изданию Ученым советом СОФ МГРИ (протокол № 6 от 31 августа 2021 г.).

© О.С. Кравцова, 2021

© СОФ МГРИ, 2021

Содержание.

1. Введение.....	4
2. Матрицы и их типы.....	5
3. Операции над матрицами.....	6
4. Задания для самостоятельной работы.....	14
5. Определители квадратной матрицы и их свойства.....	15
6. Определитель n - го порядка.....	16
7. Свойства определителей.....	17
8. Ранг матрицы.....	18
9. Обратная матрица.....	20
10.Рекомендованная литература.....	29

1. Введение.

Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений тесно связано с применением теории матриц и определителей.

Матрицы впервые были введены в математику Кэли в 1875 г. Матричные обозначения компактны, удобны и весьма полезны при выполнении, например, линейных преобразований. Интерес к теории матриц возрос после того, как в 1925 г. Гейзенберг, Борн и другие использовали их в задачах квантовой механики.

Развитие компьютерных технологий, легко осуществляющих основные матричные операции, сообщило дополнительный толчок широкому использованию матриц в различных областях знаний. Матрицы нашли большое применение в практических задачах, связанных с экономическими расчетами.

Учение об определителях возникло в связи с решением систем линейных алгебраических уравнений, т.е. систем уравнений, в которые неизвестные входят в первой степени и между собой не перемножаются. Задача состояла в том, чтобы дать общие выражения для значений переменных, удовлетворяющих заданной системе линейных уравнений.

Понятие определителя впервые дано Лейбницем в 1693 г. в связи с исключением переменных из системы трёх линейных уравнений с двумя переменными.

В 1750 г. в связи с решением системы n линейных уравнений с n переменными Крамер дал решения, которые до сих пор носят название «правила Крамера».

Разработкой теории определителей занимались Безу, Вандермонд, Лаплас, Гаусс, Бинэ, Коши, Якоби.

Название «детерминант» (определитель) ввёл Гаусс (1801 г.). Коши ввел современное обозначение определителя в виде таблицы с n строками и n столбцами.

Определители в математике широко распространены. Теория определителей дает удобное обозначение в формулах при доказательствах, а также в практических расчетах. В настоящее время нет почти ни одной отрасли математики, в которой определители не имели бы приложений.

2. Матрицы и их типы.

Определение. Матрицей размером $m \times n$ называется совокупность чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов.

$$A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Размер матрицы $m \times n$.

Числа α_{ij} называются **элементами матрицы**. Индекс i – номер строки (он всегда стоит на первом месте), j – номер столбца.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, в сокращенной записи $A = (\alpha_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Например: $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

Если матрица состоит из одной строки, то она называется **матрицей – строкой** размерности $1 \times n$: $A = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n})$.

Если матрица состоит из одного столбца, то она называется **матрицей – столбцом** размерности $m \times 1$: $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$.

При $n = m$ матрица называется **квадратной** матрицей n – го порядка.

Например $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы α_{ij} , у которых номер строки равен номеру столбца ($i = j$) называются **диагональными** и образуют **главную диагональ** матрицы.

Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется **диагональной**.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

Если у диагональной матрицы n – го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется **единичной** матрицей n – го порядка и обозначается E .

Например: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Квадратная матрица называется **треугольной**, если все ее элементы, размещенные над главной диагональю (под ней), равны нулю, т.е.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \text{ - верхняя треугольная матрица,}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ - нижняя треугольная матрица.}$$

Матрица любого размера называется **нулевой** или **нуль – матрицей**, если все ее элементы равны нулю.

Например:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Операции над матрицами.

Пусть матрицы $A_{m \times n}$ и $B_{m \times n}$ одинаковой размерности.

1) **Суммой матриц** A и B называется матрица $C_{m \times n}$ той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матрицы A и B .

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Эта операция обладает **свойствами**:

- 1) $A + B = B + A$ - коммутативность
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ - ассоциативность
- 3) $\exists 0: A + 0 = 0$
- 4) $\forall A \exists B: A + B = 0, \quad \Rightarrow \quad B = -A$

2) **Разностью матриц** A и B называется матрица $C_{m \times n}$ той же размерности, каждый элемент которой равен разности соответствующих элементов матрицы A и B .

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

3) **Произведением матриц** A на число λ называется матрица C , каждый элемент которой равен $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Например:

$$3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Матрица $(-1) \cdot A$ называется **противоположной** матрице A и обозначается $-A$.

Свойства этой операции:

а) Дистрибутивность относительно матричной суммы

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

б) Дистрибутивность относительно скалярной суммы

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

в) Ассоциативность относительно произведения скаляров

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

г) Существование элемента нейтрального относительно умножения на скаляр

$$1 \cdot A = A$$

4) Матрицу A можно **умножить** на матрицу B ($A \cdot B = C$) лишь в том случае, когда число столбцов первой матрицы $A_{m \times n}$ равно числу строк второй матрицы $B_{n \times k}$, т.е. $A_{m \times n} \times B_{n \times k} = C_{m \times k}$. При этом каждый элемент матрицы-произведения C определяется так:

$$c_{ij} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

, для всех i и j .

Т.е., элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B .

Правило размеров: $(m \times n) \cdot (n \times r) = (m \times r)$.

Поэтому в общем случае произведение матриц не коммутативно.

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Если же $A \cdot B = B \cdot A$, то такие матрицы называются **коммутирующими**. Однако, если операция произведения осуществима, то будут справедливы следующие **свойства**:

1) Ассоциативность $(AB)C = A(BC)$

2) Дистрибутивность $A(B + C) = AB + AC$ или $(A + B)C = AC + BC$

3) Ассоциативность относительно произведения на скаляр

$$A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$$

4) $\forall A: AE = EA = A$, где E - единичная матрица

5) $\forall A: A0 = 0A = 0$, где 0 – нулевая матрица

Например:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

5) Транспонирование матриц.

Определение. Матрицу A^T называют транспонированной по отношению к матрице A , если она получена из матрицы A заменой строк этой матрицы её столбцами, и, наоборот, столбцов строками.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Очевидно свойство:

$$(A^T)^T = A$$

Если $A^T = A$, то матрица называется **симметричной** и у нее $a_{ik} = a_{ki}$, т.е. равны элементы, симметричные относительно главной диагонали.

Если $A^T = -A$, то матрица называется **кососимметричной** и у нее $a_{ik} = -a_{ki}$.

Очевидно, что у такой матрицы элементы главной диагонали равны нулю.

Пример 1. Найти произведение матрицы-строки и матрицы-столбца:

$$1) \quad (5 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 = 10 - 12 = -2,$$

$$2) \quad (1 \quad -1 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 4 - 3 - 6 = -5,$$

$$3) \quad (-4 \ 1 \ -8) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = (-4) \cdot 2 + 1 \cdot (-5) + (-8) \cdot 0 = -8 - 5 = -13,$$

$$4) \quad (-2 \ 0 \ 5 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = -6 + 5 = -1,$$

$$5) \quad (7 \ -1 \ 0 \ 2 \ -3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 7 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 8 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-2) = -2 - 8 + 6 = -4$$

Пример 2. Для заданных матриц A, B, C найти матрицы $3A + 2B, C^T, A^2, AB, BA, C^T B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Решение

$$1) \quad 3A + 2B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 \\ -3 & -3 & 9 \\ 3 & -6 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 6 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+2 & 9+0 & -12+6 \\ -3+6 & -3-2 & 9+2 \\ 3+2 & -6+4 & 15+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -6 \\ 3 & -5 & 11 \\ 5 & -2 & 15 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-2) & 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 + (-4) \cdot 5 \\ (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) & (-1) \cdot (-4) + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) & 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4 - 3 - 4 & 6 - 3 + 8 & -8 + 9 - 20 \\ -2 + 1 + 3 & -3 + 1 - 6 & 4 - 3 + 15 \\ 2 + 2 + 5 & 3 + 2 - 10 & -4 - 6 + 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 11 & -19 \\ 2 & -8 & 16 \\ 9 & -5 & 15 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \\
4) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-4) \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) + 5 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 + 9 - 4 & -3 - 8 & 6 + 3 \\ -1 - 3 + 3 & 1 + 6 & -3 - 1 \\ 1 - 6 + 5 & 2 + 10 & 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 9 \\ -1 & 7 & -4 \\ 0 & 12 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \\
5) &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) & 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 + 3 & 3 - 6 & -4 + 15 \\ 6 + 1 + 1 & 9 + 1 - 2 & -12 - 3 + 5 \\ 2 - 2 & 3 - 2 & -4 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 8 & 8 & -10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Подчеркнем еще раз, что $AB \neq BA$.

$$\begin{aligned}
&C^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \\
6) &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 & (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+9-2 & -3-4 & 3+3 \\ -1-3 & 1 & -3-1 \\ 6-3 & -2-6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 6 \\ -4 & 1 & -4 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример 3. Показать, что матрица $S = 3A - 2B$ – симметрическая, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение

Используя свойства сложения и умножения матриц на число, получим

$$\begin{aligned} S = 3A - 2B &= 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 9 & 9 & 18 \\ 6 & -6 & 12 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 \\ -6 & 2 & 8 \\ -10 & 16 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+8 & -3+6 & 6+10 \\ 9-6 & 9+2 & 18-8 \\ 6-10 & -6+16 & 12-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -4 \\ 3 & 11 & 10 \\ -4 & 10 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Полученная матрица S – симметрическая, так как при транспонировании она не изменяется.

Пример 4. Показать, что матрица $K = 5A - B$ – кососимметрическая, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 5 & -12 & 11 \\ 2 & 10 & -24 \\ -1 & 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение

Используя свойства сложения и умножения матриц на число, получим

$$\begin{aligned} K = 5A - B &= 5 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -12 & 11 \\ 2 & 10 & -24 \\ -1 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -15 & 15 \\ 5 & 10 & -25 \\ -5 & 10 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -12 & 11 \\ 2 & 10 & -24 \\ -1 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5-5 & -15-(-12) & 15-11 \\ 5-2 & 10-10 & -25-(-24) \\ -5-(-1) & 10-9 & -5-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Полученная матрица K – кососимметрическая, так как при транспонировании она меняет знак на противоположный:

$$K^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -K.$$

Пример 5. Показать, что матрица $C = A + B - B^T$ является нулевой матрицей, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a-1 & a^2-1 \\ 1-a & 0 & b^2-c \\ 1-a^2 & c-b^2 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Решение

Используя свойства сложения и транспонирования матриц, получим

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 0 & a-1 & a^2-1 \\ 1-a & 0 & b^2-c \\ 1-a^2 & c-b^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a-1 & a^2-1 \\ 1-a & 0 & b^2-c \\ 1-a^2 & c-b^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 \\ a-1 & 0 & c-b^2 \\ a^2-1 & b^2-c & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a-1+1-a & a^2-1+1-a^2 \\ 1-a+a-1 & 0 & b^2-c+c-b^2 \\ 1-a^2+a^2-1 & c-b^2+b^2-c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пример 6. Найти матрицу $C = AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 \\ 1 & -4 & 8 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \\ -6 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение

Данные матрицы удовлетворяют правилу размеров, следовательно, их можно перемножить. Умножая по очереди строки матрицы A на столбцы матрицы B , получим матрицу

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 7 \cdot (-6) & (-3) \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) + 7 \cdot (-2) & (-3) \cdot 9 + (-2) \cdot (-3) + 7 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + 8 \cdot (-6) & 1 \cdot 0 + (-4) \cdot (-1) + 8 \cdot (-2) & 1 \cdot 9 + (-4) \cdot (-3) + 8 \cdot 5 \\ (-5) \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-6) & (-5) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & (-5) \cdot 9 + 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -50 & -12 & 14 \\ -50 & -12 & 61 \\ -1 & -1 & -59 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пример 7. Показать, что произведение матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 \\ 1 & -4 & 8 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ на

транспонированную является симметрической матрицей.

Решение

Транспонируем матрицу A :

$$A^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -2 & -4 & 3 \\ 7 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и A^T удовлетворяют правилу размеров, следовательно, их можно перемножить. Умножая по очереди строки матрицы A на столбцы матрицы A^T , получим матрицу

$$S = \begin{pmatrix} (-3)(-3)+(-2)(-2)+7 \cdot 7 & (-3) \cdot 1+(-2)(-4)+7 \cdot 8 & (-3)(-5)+(-2) \cdot 3+7 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-3)+(-4)(-2)+8 \cdot 7 & 1 \cdot 1+(-4)(-4)+8 \cdot 8 & 1 \cdot (-5)+(-4) \cdot 3+8 \cdot (-1) \\ (-5)(-3)+3 \cdot (-2)+(-1) \cdot 7 & (-5) \cdot 1+3 \cdot (-4)+(-1) \cdot 8 & (-5)(-5)+3 \cdot 3+(-1)(-1) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 9+4+49 & -3+8+56 & 15-6-7 \\ -3+8+56 & 1+16+64 & -5-12-8 \\ 15-6-7 & -5-12-8 & 25+9+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 & 61 & 2 \\ 61 & 81 & -25 \\ 2 & -25 & 35 \end{pmatrix}.$$

Матрица S является симметрической, так как при транспонировании она не меняется, т.е. $S = S^T$, что и требовалось доказать.

Пример 8. Показать, что матрицы A и B перестановочны.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Данные матрицы удовлетворяют правилу размеров, следовательно, их можно перемножить в любом порядке.

Найдем произведение AB . Умножая по очереди строки матрицы A на столбцы матрицы B , получим матрицу

$$AB = \begin{pmatrix} 6+1+2 & 3+1-4 & 2-2 \\ 6-2-4 & 3-2+8 & -4+4 \\ -6+5+1 & -3+5-2 & 10-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Теперь перемножим эти же матрицы в другом порядке, т.е. найдем произведение BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 6+3 & 3+3-6 & -3+6-3 \\ 2-2 & 1-2+10 & -1-4+5 \\ -4+4 & -2+4-2 & 2+8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Так как $AB = BA$, то исходные матрицы перестановочны, что и требовалось показать.

4. Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Для матриц A , B , C вычислить:

1) $3A^T - 4B$, 2) $2B^T + 5A$, 3) $AB + 5E$, 4) $AC + 2B^T$, 5) $CB - 2A^T$, 6) $(C^T)^2 - 4E$,
если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Для матриц A , B , C вычислить:

1) $5A - 2B + 3C$, 2) $2A^T - 3C^T + B^T$, 3) $AB - BA$, 4) $A^2 - B^2$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти произведение матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$

4) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$

5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix};$

7) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$

8) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. Определители квадратной матрицы и их свойства

Определителем называется квадратная числовая таблица, вычисляемая по определенным правилам.

Рассмотрим определители 1-го, 2-го и 3-го порядков.

Определение. Пусть $A=(a)$ — квадратная матрица **первого порядка**, то есть одноэлементная матрица. **Определителем** или **детерминантом** этой матрицы, обозначаемым Δ или $\det A$, называется число, равное ее элементу:

$$\Delta = \det A = a \quad (1)$$

Пример: $\det(5,7)=5,7$, $\det(-3,2)=-3,2$

Определение. **Определителем** или **детерминантом** квадратной матрицы **второго порядка**

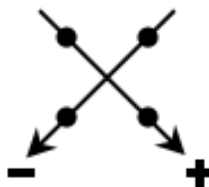
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется число, равное разности произведения элементов матрицы, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали; это число обозначается Δ , $\det A$ или вертикальными чертами:

$$\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \quad (2)$$

Отметим, что в этой формуле значение определителя задается последним выражением, остальные выражения представляют собой лишь разные виды обозначения определителя.

Правило, по которому вычисляется определитель матрицы второго порядка, схематично можно изобразить так:



На этой схеме черные кружки обозначают элементы матрицы. Одно произведение элементов берется со знаком плюс, другое — со знаком минус.

Пример:

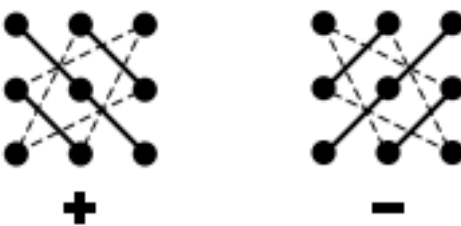
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 6 \cdot 5 = 8 - 30 = -22$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 6 \cdot 4 = 10 - 24 = -14$$

Определение. Определителем или детерминантом квадратной матрицы **третьего порядка**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число, которое может быть получено из элементов матрицы по так называемому **правилу диагоналей и треугольников** или **правилу Саррюса**:



$$\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
(3)

Определитель представляет собой сумму шести слагаемых, три из которых берутся со знаком плюс и три — со знаком минус. Каждое слагаемое есть произведение трех элементов матрицы. Произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, и два произведения элементов, расположенных в вершинах двух равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, и с вершинами в противоположных углах, берутся со знаком плюс (см. схему). Три произведения, которые строятся по такому же правилу, но относительно побочной диагонали, берутся со знаком минус. Так составленная сумма из шести слагаемых (из которых три взяты с плюсом, а другие три — с минусом) и есть определитель квадратной матрицы третьего порядка.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Тогда, согласно формуле (3),

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 2 =$$

$$5 - 8 + 12 + 3 - 20 - 8 = -16$$

Для того чтобы ввести понятие определителя квадратной матрицы произвольного порядка, нам потребуются сведения из теории перестановок.

6. Определитель n-го порядка.

Определение. Определителем или детерминантом квадратной матрицы A n -го порядка называется число, равное сумме всех $n!$

произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца. При этом каждое произведение берется со знаком плюс или минус по следующему правилу.

Напомним, что $n!$ (читается «эн-факториал») — это есть, по определению, произведение всех целых чисел от 1 до n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Например, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$ и т. д. Отсюда видно, что факториал — быстро возрастающая функция.

Правило для знака. Возьмем какое-либо из произведений, входящих в состав определителя, и расположим в нем сомножители в порядке следования номеров строк:

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n}$$

Тогда номера столбцов образуют перестановку $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ из n элементов. Данное произведение берется со знаком плюс, если эта перестановка четная, и со знаком минус, если она нечетная.

Одним из способов вычисления определителей является разложение определителя по элементам какой-либо его строки или столбца с использованием понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием элементов i -й строки и j -го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{(i+j)}$:

$$A_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij}.$$

То есть определитель квадратной матрицы A порядка n равен сумме произведений элементов какой-либо i -й его строки на алгебраические дополнения этих элементов.

Например, разложив определитель второго порядка по элементам первой строки получим правило его вычисления.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2} a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

7. Свойства определителей

Свойство 1

При транспонировании матрицы её определитель не меняет своего значения, т.е $\det A = \det A^T$.

Свойство 2 (антисимметрии)

При перестановке двух строк матрицы её определитель меняет знак.

Свойство 3

Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки, равен нулю.

Свойство 4 (линейности)

Если все элементы i -й строки (столбца) матрицы A представлены в виде $a_{ij} = \lambda b_j + \mu c_j$, причем $j = 1, 2, \dots, n$, то $\det A = \lambda \det B + \mu \det C$, где матрица B получена из матрицы A заменой i -й строки числами b_j , а C – числами c_j .

Пример 1

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \\ 7 & 2 \cdot 6 - 3 \cdot 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-65) - 3 \cdot (-38) = \\ = -130 + 114 = -16 = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Свойство 5 (следствие свойства 4)

Общий множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Пример 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 18 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Свойство 6 (следствие свойств 3 и 5)

Определитель матрицы, содержащей две пропорциональные строки (столбца), равен нулю.

Свойство 7 (следствие свойств 4 и 6)

Если к элементам одной из строк матрицы A прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженной на некоторое число, то получим матрицу с тем же определителем.

Свойство 8

Если все элементы некоторой строки матрицы равны нулю, то её определитель равен нулю.

Свойство 9

Определитель произведения двух квадратных матриц одинакового порядка равен произведению определителей этих матриц: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

8. Ранг матрицы

Рассмотрим основную характеристику матрицы, называемую её рангом.

Минором M_k порядка k матрицы A называется любой определитель k -го порядка этой матрицы, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых её « k » столбцов и любых её « k » строк.

$$M_1 = a_{ij}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{sj} & a_{sk} \end{vmatrix}, \quad u. m. d.$$

$$i, s = 1, \dots, m, \quad j, k = 1, \dots, n$$

Рангом r матрицы A называется **наибольший порядок r** минора этой матрицы, отличного от нуля:

$$\exists M_r \neq 0, \forall M_k = 0 \text{ или } \exists M_k, \quad k = r+1, r+2, \dots$$

(существует минор порядка r , не равный нулю, а все миноры более высоких порядков равны нулю или не существуют).

Ранг матрицы можно находить приведением матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями.

Матрицы, имеющие одинаковые ранги, называют **эквивалентными**. Обозначают эквивалентность матриц так: $A \sim B$.

Элементарными преобразованиями матрицы называют:

- 1) транспонирование,
- 2) перестановку строк,
- 3) умножение строки на любое число и сложение с соответствующими элементами другой строки,
- 4) вычёркивание одинаковых и пропорциональных строк, кроме одной из них.

Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.

Условимся называть **рабочей** строку, которая не изменяется на проводимом этапе элементарных преобразований матрицы.

Рабочая строка первая. Получим нули в первом столбце на местах всех элементов первого столбца за исключением элемента в первой строке a_{11} . Для этого умножим все элементы первой строки на такие числа, чтобы при сложении с элементами первого столбца остальных строк получить нули в первом столбце, за исключением элемента первой строки a_{11} .

Если элемент a_{11} не равен единице, можно поменять местами строки, записав первой ту, в которой a_{11} равен единице.

Если все элементы первого столбца отличны от единицы, можно:

- 1) умножить первую строку матрицы на число, противоположное тому, на месте которого Вы хотите получить ноль; а строку, в которой хотите получить ноль, умножьте на элемент a_{11} в первой строке;
- 2) сложить соответствующие элементы умноженной первой строки и умноженной другой строки.

Пример. Найдём ранг матрицы методом элементарных преобразований

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Получим нули в первом столбце. Для этого умножим первую строку на (-5) , вторую – на 3 и сложим соответствующие элементы. Потом умножим первую строку на (-7) , третью – на 3 и сложим соответствующие элементы.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & : & 2 \\ 5 & -3 & 1 & : & 3 \\ 7 & 2 & -3 & : & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-5)(-7) \\ + \\ + \end{matrix}} (3) \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & : & 2 \\ 0 & -14 & 13 & : & -1 \\ 0 & -1 & 5 & : & 4 \end{bmatrix} \sim$$

Далее нужно получить нули во втором столбце ниже главной диагонали.

Рабочая строка вторая. Получаем нули во втором столбце ниже элемента a_{22} .

Умножим третью строку на (-14) и сложим с соответствующими элементами второй строки. (Или можно было поменять местами вторую и третью строки, чтобы на главной диагонали оказалась единица).

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & : & 2 \\ 0 & -14 & 13 & : & -1 \\ 0 & -1 & 5 & : & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{+(-14)} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & : & 2 \\ 0 & -14 & 13 & : & -1 \\ 0 & 0 & -57 & : & -57 \end{bmatrix};$$

$$\left(\sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & : & 2 \\ 0 & -1 & 5 & : & 4 \\ 0 & -14 & 13 & : & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-14)} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & : & 2 \\ 0 & -1 & 5 & : & 4 \\ 0 & 0 & -57 & : & -57 \end{bmatrix} \right)$$

$\text{Rang } A = 3$, поскольку матрица имеет минор третьего порядка.

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 13 \\ 0 & 0 & -57 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-14) \cdot (-57) \neq 0,$$

а миноров четвёртого порядка для данной матрицы не существует (у неё только три строки).

9. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется **обратной** матрице A , если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, т.е. произведение этих матриц равно единичной матрице.

Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. чтобы $\det A = |A| \neq 0$.

Алгоритм построения обратной матрицы.

- 1) Вычисляем $\det A = |A|$. Если $\det A = |A| \neq 0$, то $\exists A^{-1}$.
- 2) Транспонируем $A \rightarrow A^T$.
- 3) Строим присоединенную матрицу A^U заменой $a_{ik} = a_{ki} : A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^U$.

Свойства обратной матрицы:

- 1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- 2) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;
- 3) $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 4) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Пример 1. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение**I способ**

1. Вычислим определитель данной матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 9 - 3 \cdot 4 \cdot 1 = 2.$$

Так как определитель матрицы A отличен от нуля, т.е. $\det A = |A| = 2 \neq 0$, то данная матрица невырожденная и, следовательно, имеет обратную матрицу.

2. Транспонируем матрицу A :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем присоединенную матрицу A^U . Для этого вычислим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A^T :

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 12 = 6; A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -(9 - 3) = -6; A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (4 - 2) = 2;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -(9 - 4) = -5; A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8; A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1; A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 1) = -2; A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

Присоединенная матрица A^U будет иметь вид

$$A^U = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Так как $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^U$, то можно записать обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5/2 & 4 & -3/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

II способ

Обратную матрицу можно вычислить с помощью элементарных преобразований вспомогательной матрицы. Для этого необходимо следующее.

1. Составить вспомогательную матрицу, которая получается, если к исходной матрице приписать справа единичную матрицу того же размера.
2. Путем элементарных преобразований строк вспомогательной матрицы получить в левой ее части вместо исходной единичную матрицу.
3. В правой части вспомогательной матрицы на месте единичной получится матрица, обратная данной.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-L_1]{L_2-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-L_2]{L_1-L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-L_2]{L_1-L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2-3L_3]{L_1+2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5/2 & 4 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5/2 & 4 & -3/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-6) + 1 \cdot 8 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 1 & 1 \cdot (-6) + 2 \cdot 8 + 4 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 6 + 3 \cdot (-5) + 9 \cdot 1 & 1 \cdot (-6) + 3 \cdot 8 + 9 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 9 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

Пример 2. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение

I способ

1. Вычислим определитель данной матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 5 = -3.$$

Так как определитель матрицы A отличен от нуля, т.е. $\det A = |A| = -3 \neq 0$, то данная матрица невырожденная и, следовательно, имеет обратную матрицу.

2. Транспонируем матрицу A :

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем присоединенную матрицу A^U . Для этого вычислим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A^T :

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1; A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1; A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(10 - 6) = -4; A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2; A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 5) = -1;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3; A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 2) = 0; A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 5 = -3.$$

Присоединенная матрица A^U будет иметь вид

$$A^U = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Так как $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^U$, то можно записать обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II способ

Вычислим обратную матрицу с помощью элементарных преобразований вспомогательной матрицы.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - 5/2 L_1} \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1-L_3} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \cdot (-\frac{2}{3})} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2+\frac{1}{3}L_3} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1-L_2} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_{1/2}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Проверка

$$\begin{aligned}
AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \\
&= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) \\ 5 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 & 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 5 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \\
&= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E
\end{aligned}$$

Пример 3. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение

I способ

1. Вычислим определитель данной матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 \cdot 5 + 6 \cdot (-2) \cdot 7 - 5 \cdot 3 \cdot 7 - 6 \cdot 5 \cdot (-3) - (-2) \cdot 4 \cdot 2 = -1.$$

Так как определитель матрицы A отличен от нуля, т.е. $\det A = |A| = -1 \neq 0$, то данная матрица невырожденная и, следовательно, имеет обратную матрицу.

2. Транспонируем матрицу A :

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем присоединенную матрицу A^U . Для этого вычислим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A^T :

$$A_{11}=(-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9+8=-1; A_{21}=(-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -(-15+14)=1; A_{31}=(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 20-21=-1;$$

$$A_{12}=(-1)^3 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-18-20)=38; A_{22}=(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -6-35=-41; A_{32}=(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -(8-42)=34;$$

$$A_{13}=(-1)^4 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -12-15=-27; A_{23}=(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-25)=29; A_{33}=(-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6-30=-24.$$

Присоединенная матрица A^U будет иметь вид

$$A^U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}.$$

4. Так как $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^U$, то можно записать обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

II способ

Вычислим обратную матрицу с помощью элементарных преобразований вспомогательной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & | & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1+2L_3, L_2+L_3} \begin{pmatrix} 12 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 2 \\ 11 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1-L_2, L_2-11L_1, L_3-5L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3+2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -11 & 12 & -10 \\ 0 & -2 & -3 & | & -5 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2+L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -11 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & | & -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -38 & 41 & -34 \\ 0 & 0 & 1 & | & 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-38) + 7 \cdot 27 & 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 41 + 7 \cdot (-29) & 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-34) + 7 \cdot 24 \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-38) + 4 \cdot 27 & 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 41 + 4 \cdot (-29) & 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-34) + 4 \cdot 24 \\ 5 \cdot 1 + (-2) \cdot (-38) + (-3) \cdot 27 & 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 41 + (-3) \cdot (-29) & 5 \cdot 1 + (-2) \cdot (-34) + (-3) \cdot 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Пример 4. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

I способ

1. Вычислим определитель данной матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-3) - (-3) \cdot 5 \cdot (-1) - (-3) \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4.$$

Так как определитель матрицы A отличен от нуля, т.е. $\det A = |A| = 4 \neq 0$, то данная матрица невырожденная и, следовательно, имеет обратную матрицу.

2. Транспонируем матрицу A :

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем присоединенную матрицу A^U . Для этого вычислим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A^T :

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 3 = 8; A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 3) = -6; A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 5 = 2;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-3 - 3) = 6; A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4; A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(1 - 3) = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 15 = 6; A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(-3 + 9) = -6; A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 9 = 4.$$

Присоединенная матрица A^U будет иметь вид

$$A^U = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 6 & -4 & 2 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Так как $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^U$, то можно записать обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 6 & -4 & 2 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

II способ

Вычислим обратную матрицу с помощью элементарных преобразований вспомогательной матрицы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 - 3L_1]{L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_2]{L_1 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \cdot \frac{1}{2}]{L_2 \cdot (-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 + L_2]{L_1 + 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & | & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 + L_3]{L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 & (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-3) & (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ (-3) \cdot 4 + 5 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 & (-3) \cdot (-3) + 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-3) & (-3) \cdot 1 + 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ (-3) \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 & (-3) \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) & (-3) \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

Пример 5. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

I способ

1. Вычислим определитель данной матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 5 + (-4) \cdot (-6) \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot 5 - 2 \cdot (-4) \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot (-6) = 8.$$

Так как определитель матрицы A отличен от нуля, т.е. $\det A = |A| = 8 \neq 0$, то данная матрица невырожденная и, следовательно, имеет обратную матрицу.

2. Транспонируем матрицу A :

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем присоединенную матрицу A^U . Для этого вычислим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A^T :

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 6 = -15; A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(-12 + 5) = 7; A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = (24 + 15) = 39;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -(6 + 6) = -12; A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 5 = 4; A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -(-18 - 10) = 28;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1; A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 + 4) = -1; A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1.$$

Присоединенная матрица A^U будет иметь вид

$$A^U = \begin{pmatrix} -15 & 7 & 39 \\ -12 & 4 & 28 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Так как $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^U$, то можно записать обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -15 & 7 & 39 \\ -12 & 4 & 28 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15/8 & 7/8 & 39/8 \\ -3/2 & 1/2 & 7/2 \\ 1/8 & -1/8 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

II способ

Вычислим обратную матрицу с помощью элементарных преобразований вспомогательной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -12 & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & | & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \cdot (-1) \\ L_3 \cdot (-8)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 12 & | & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 11 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 28 & | & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/8 & -1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 39 & | & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 28 & | & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/8 & -1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_1-39L_3 \\ L_2-28L_3 \end{matrix}} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -15/8 & 7/8 & 39/8 \\ 0 & 1 & 0 & | & -12/8 & 4/8 & 28/8 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/8 & -1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -15/8 & 7/8 & 39/8 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3/2 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/8 & -1/8 & -1/8 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Проверка.

$$\begin{aligned}
AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15/8 & 7/8 & 39/8 \\ -3/2 & 1/2 & 7/2 \\ 1/8 & -1/8 & -1/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 & 7 & 39 \\ -12 & 4 & 28 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 \cdot (-15) + (-4) \cdot (-12) + 5 \cdot 1 & 3 \cdot 7 + (-4) \cdot 4 + 5 \cdot (-1) & 3 \cdot 39 + (-4) \cdot 28 + 5 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-15) + (-3) \cdot (-12) + (-6) \cdot 1 & 2 \cdot 7 + (-3) \cdot 4 + (-6) \cdot (-1) & 2 \cdot 39 + (-3) \cdot 28 + (-6) \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-15) + (-1) \cdot (-12) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 7 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 39 + (-1) \cdot 28 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.
\end{aligned}$$

Рекомендуемая литература.

Основная литература:

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т.Письменный. -12-е изд. -Москва : Айрис-пресс, 2014. - 608с. -ISBN 978-5-8112-5257-2. — Текст: непосредственный.

2. Шипачев, В. С. Высшая математика: учебное пособие для вузов/ В. С. Шипачев. - 8-е изд., перераб. и доп. - Москва: Издательство Юрайт, 2020. - 447 с. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-534-12319-7. - Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. - URL: <https://urait.ru/bcode/449732>

Дополнительная литература:

1. Ильин В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник / В.А.Ильин, Г.Д.Ким. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва : Проспект, 2012. - 400 с. - ISBN 978-5-392-02856-6. - Текст: непосредственный

Учебное издание

Ольга Станиславовна Кравцова

Линейная алгебра

Часть I

Матрицы и определители

Учебно-методическое пособие
для студентов первого курса очной формы обучения всех
специальностей

Технический редактор: О.С. Кравцова
Компьютерный набор и верстка: О.С. Кравцова

Подписано к печати _____ Формат _____
Условных печатных листов _____ тираж _____ заказ _____

Отпечатано с авторского оригинала в редакционно-издательском
отделе

СОФ МГРИ
Старый Оскол, ул. Ленина, 14/13