

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Двоеглазов Семен Иванович
Должность: Директор
Дата подписания: 30.06.2025 13:40:37
Уникальный программный ключ:
2cc3f5fd1c09cc1a69668dd98bc3717111a1a535



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Старооскольский филиал
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
**«Российский государственный геологоразведочный университет имени
Серго Орджоникидзе»
(СОФ МГРИ)**

Кафедра «Прикладной геологии, технологии поисков и разведки МПИ»

Кравцова О.С.

«Математические методы в экономике»

Учебно-методическое пособие для студентов
направления 38.03.01 «Экономика»
заочной формы обучения

Рекомендовано Ученым советом СОФ МГРИ

г. Старый Оскол 2022 год

УДК 330.4
ББК 65.050
К 77

Рецензент:

к.п.н., доцент кафедры автоматизированных и информационных систем управления СТИ НИТУ «МИСиС» М.В. Мякотина

Кравцова О.С. Математические методы в экономике: учебно-методическое пособие для студентов направления 38.03.01 «Экономика» заочной формы обучения/ О.С.Кравцова; СОФ МГРИ. – Старый Оскол : 2022. – 74 с.

Составлено в соответствии с утвержденной программой дисциплины «Математические методы в экономике». В пособии даны краткие теоретические сведения и представлены решения типовых задач по курсу, даны условия заданий для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов направления 38.03.01 «Экономика» заочной формы обучения.

Утверждено и рекомендовано к изданию Ученым советом СОФ МГРИ (протокол № 6 от 25.02.2022 г.).

© Кравцова О.С.
© СОФ МГРИ, 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	5
2. СИМПЛЕКС МЕТОД	12
2.1 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ СМЕСИ	12
2.2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА	16
2.3 ПРИМЕНЕНИЕ ОЦЕНОК В ПОСЛЕОПТИМИЗАЦИОННОМ АНАЛИЗЕ	26
3. РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ	33
4. ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ	39
5. ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.	43
5.1. СОСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.	43
5.2. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.	46
6. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	50
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА	59
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.	73

ВВЕДЕНИЕ

Применение математических методов в экономике заключается в моделировании исследуемого экономического процесса и применении к полученной модели математического метода исследования из соответствующего раздела математики. Этот подход требует учета взаимосвязей и отношений с другими объектами (предприятиями, фирмами), разработки математических моделей, отражающих количественные показатели системной деятельности работников организации, применения для расчетов электронно-вычислительной техники.

Курс "Математические методы в экономике" направлен на расширение и углубление знаний студентов в области экономического анализа со значительным использованием математического аппарата и обучению их использовать полученные знания в профессиональной деятельности. Математической моделью реального процесса называется его упрощенное описание с помощью математических символов и операций. В процессе моделирования выделяется самое существенное, что характеризует данный процесс и отбрасывается несущественное.

Математическое моделирование использовалось в экономике, начиная с XVIII столетия:

- Ф. Кенэ (1758 г., «Экономические таблицы» — математическое описание процесса общественного воспроизводства),
- А. Смит (классическая макроэкономическая модель),
- Д. Рикардо (модель международной торговли).

В XIX веке большой вклад в моделирование рыночной экономики внесла математическая школа, представителями которой являются О. Курно, Л. Вальрас, В. Парето, Ф. Эджворт.

В XX веке математические методы также широко использовались в экономике многими исследователями. За их разработку и эффективное применение ряд ученых был удостоен Нобелевской премии по экономике (Д. Хикс, Р. Солоу, В. Леонтьев, П. Самуэльсон, Г. Марковиц, Д. Тобин, Л. Канторович и др.)

Дисциплины, связанные с математическим моделированием экономических задач и применением для их решения соответствующих математических методов, входят в учебные планы всех экономико-математических специальностей и направлений. Математическая формализация ряда важных задач микро- и макроэкономики приводит к задачам оптимизации.

Пособие предназначено для студентов направления 38.03.01 «Экономика» заочной формы обучения, изучающих курс «Математические методы в экономике».

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

[illegible]
$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x + a_{12} y < b_1 \\ a_{21} x + a_{22} y < b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} x + a_{m2} y < b_m \end{array} \right.$$
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

при условиях

[illegible]

В симметричной форме задача линейного программирования запишется так: найти максимум (минимум) целевой функции

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

при условиях

[illegible]

Набор чисел $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, удовлетворяющих указанным условиям, называют *планом*. Среди всех возможных планов может существовать *оптимальный план* $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, дающий целевой функции максимальное (минимальное) значение.

Для решения задачи линейного программирования с двумя переменными можно использовать *графический метод*. В этом случае задача принимает вид

$$f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \longrightarrow \max(\min)$$

при условиях

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{a}_{11}\textbf{x}_1 + \textbf{a}_{12}\textbf{x}_2 \leq \textbf{a}_{10} \\ \textbf{a}_{21}\textbf{x}_1 + \textbf{a}_{22}\textbf{x}_2 \leq \textbf{a}_{20} \\ \\ \textbf{a}_{m1}\textbf{x}_1 + \textbf{a}_{m2}\textbf{x}_2 \leq \textbf{a}_{m0} \\ \textbf{x}_1 \geq 0, \quad \textbf{x}_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

При использовании графического метода в плоскости (X_1, X_2) строится область допустимых решений задачи, определяемая условиями, и вектор $s = (s_1, s_2)$, который будет показывать направление наискорейшего возрастания функ-

ции f (соответственно вектор $-c$ будет показывать направление наискорейшего убывания). Если на плоскости построить семейство параллельных прямых, перпендикулярных к вектору c , то для всех точек каждой из таких прямых $f = \text{const}$. Например, для прямой, перпендикулярной к вектору c и проходящей через начало координат, $f = 0$ (рис. 1). Искомая точка максимума находится перемещением прямой $f = \text{const}$ в направлении вектора c параллельным образом. Максимум функции достигнет в последней точке области допустимых решений, через которую пройдет перемещаемая прямая $f = \text{const}$ (на рис.1 - это точка A). Аналогично перемещением прямой в противоположном направлении находится минимум функции.

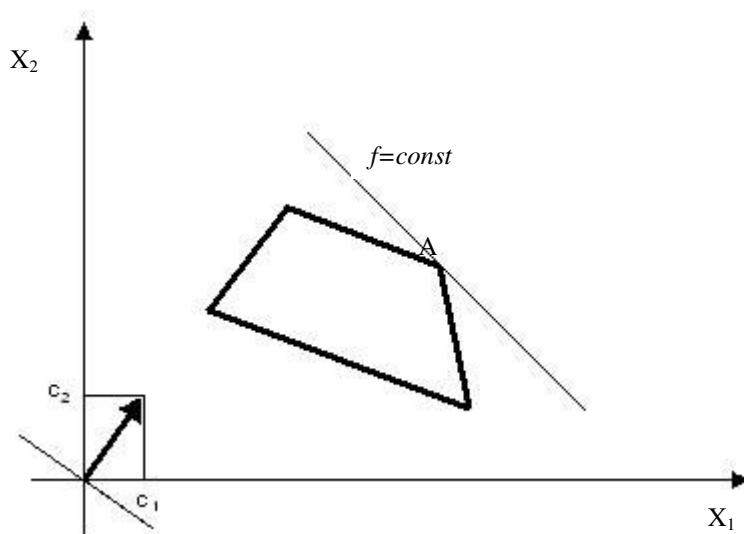


Рис. 1. Графический метод решения задачи линейного программирования с двумя переменными.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Решите систему линейных неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 > 6 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Решение. Покажем вначале на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих первому неравенству. Для этого построим прямую $x_1 + x_2 = 6$ по двум точкам:

x_1	0	6
x_2	6	0

Эта прямая разбивает координатную плоскость на две полуплоскости, одна из которых и будет содержать точки, удовлетворяющие данному неравен-

ству. Для того чтобы определить, какая из двух полуплоскостей содержит точки - решения неравенства, подставим в это неравенство координаты точки 0 (0, 0): $0 + 0 < 6$. т.е. оно верно. Следовательно, речь идет о полуплоскости, содержащей точку 0 (0, 0). На рис. 15, а она заштрихована. Поскольку точки, принадлежащие прямой $x_1 + x_2 = 6$, также являются решением неравенства $x_1 + x_2 \leq 6$, прямая изображена на рисунке сплошной линией. (Если бы неравенство имело вид $x_1 + x_2 < 6$, то точки прямой не входили бы в множество решений и ее следовало бы изобразить пунктирной линией.) Обычно, чтобы не загромождать рисунок, штрихуют не всю полуплоскость, а только ее небольшую часть, прилегающую к прямой, как это показано на рис. 15, б. Аналогично ищем решения неравенств $x_1 + 2x_2 > 6$ и $x_1 \geq 0$, предварительно построив по двум точкам графики соответствующих прямых:

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

X_1	0	6
X_2	3	0

И

$$x_1 = 0$$

X_1	0	0
X_2	0	6

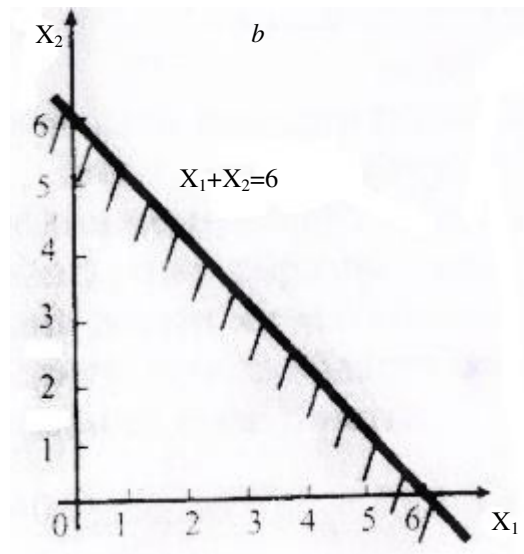
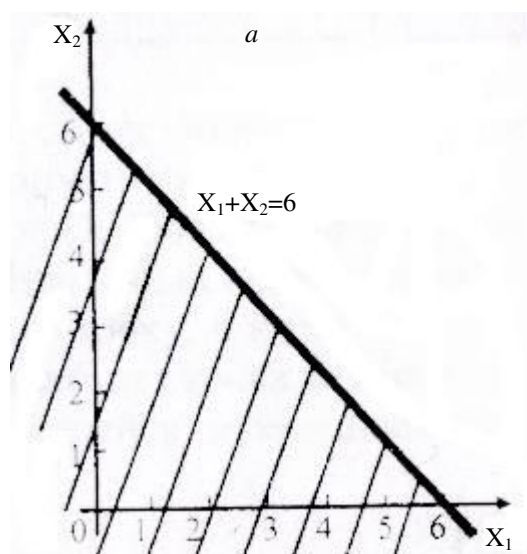


Рис. 2 Множество решений неравенства $x_1 + x_2 \leq 6$

При этом следует учитывать, что график прямой $x_1 + 2x_2 = 6$ должен быть изображен пунктирной линией, так как точки данной прямой не являются решениями неравенства $x_1 + 2x_2 > 6$ (рис. 16).

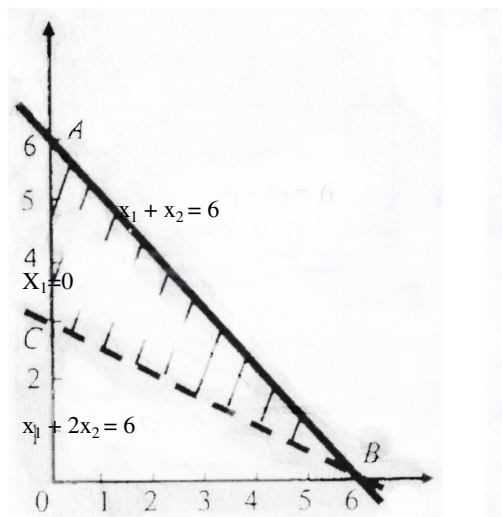


Рис. 3.

Решениями системы неравенств будут все точки плоскости, в которой пересекаются три штрихованные области. Как следует из рисунка, это будут точки, принадлежащие области ABC . причем точки, лежащие на отрезках AC и AB , входят в множество решений неравенства, а точки отрезка BC - нет.

2. Предприятие выпускает продукцию двух видов A и B , для производства которых требуется сырье трех видов M, N, P , в следующих количествах:

Вид сырья	Потребности сырья, т. Для производства 1 т. продукции вида	
	A	B
M	1	2
N	3	1
P	3	2

Запасы сырья M составляют 140 т, N - 150 т, P - 180 т. Продажа 1 т продукции вида A дает прибыль 2 у.е., продукции вида B - 3 у.е. Определите, какое количество продукции вида A и B следует выпускать предприятию для получения максимальной прибыли.

Решение. Обозначим через x_1 объем производства продукции вида A , а через x_2 - объем производства продукции вида B . Тогда прибыль от реализации продукции вида A составит $2x_1$, а от реализации продукции вида B - $3x_2$. Общая прибыль предприятия в этом случае

$$f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

ограничения на затраты сырья запишутся в виде

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 140 \\ 3x_1 + x_2 \leq 150 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 180 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Последние два неравенства показывают, что количество выпущенной продукции не может быть отрицательным числом.

Для применения графического метода решения задачи на координатной плоскости построим графики прямых

$$x_1 + 2x_2 = 140, 3x_1 + x_2 = 150, 3x_1 + 2x_2 = 180, x_1 = 0, x_2 = 0.$$

Прямые строим по двум точкам:

$$x_1 + 2x_2 = 140$$

x_1	0	140
x_2	70	0

$$3x_1 + x_2 = 150$$

x_1	0	50
x_2	150	0

$$3x_1 + 2x_2 = 180$$

x_1	0	60
x_2	90	0

Далее по аналогии с предыдущей задачей находим область допустимых решений (рис. 17). Затем строим вектор $c = (2, 3)$ и перпендикулярно к нему линию нулевого уровня. Перемещая полученную линию параллельным образом, находим точку, в которой целевая функция достигает максимума. Это будет точка B ; она является последней точкой области, касающейся перемещаемой линии. Найдем её координаты:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 140 \\ 3x_1 + 2x_2 = 180 \end{cases}$$

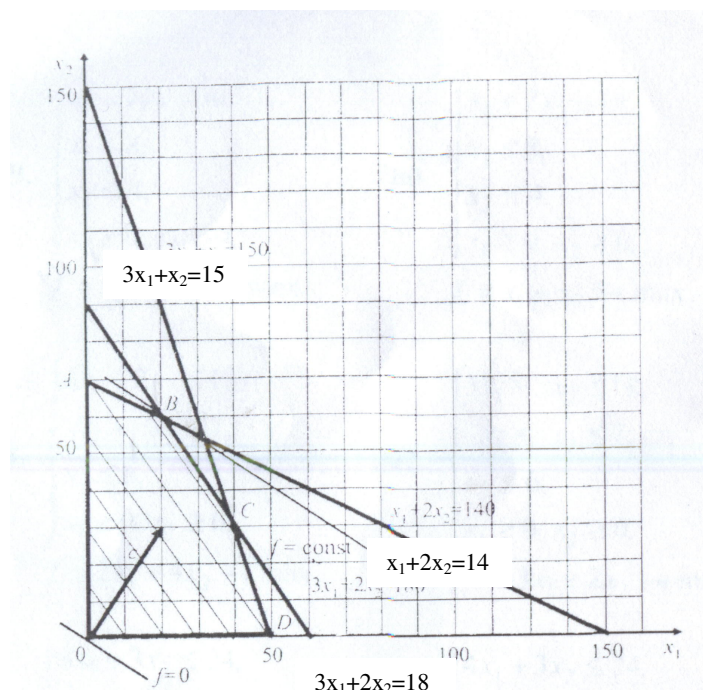


Рис. 4.

Решая данную систему, находим координаты точки B : $x_1 = 20, x_2 = 60$.

Таким образом, максимальная прибыль будет достигнута при плане выпуска продукции вида А 20 т и продукции вида В 60 т.

При этом прибыль составит

$$f = 2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 60 = 220 \text{ (y.e.)}.$$

ЗАДАНИЯ

Найдите решение системы линейных неравенств.

$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_2 \geq 20 \end{cases}$	$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$
$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_1 < 5 \end{cases}$

Решите задачи линейного программирования геометрическим методом.

$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ f = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ f = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \end{cases}$
$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ f = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ f = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max \end{cases}$
$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ f = x_1 + x_2 \rightarrow \max \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ f = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max \end{cases}$
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ f = x_1 + x_2 \rightarrow \max \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ f = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max \end{cases}$
$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ f = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ f = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max \end{cases}$

2. СИМПЛЕКС МЕТОД

2.1 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ СМЕСИ

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Имеются продукты А, В, С, 1 г каждого из которых содержит следующее количество микроэлементов М и N:

Продукты	Содержание микроэлементов, мг	
	М	N
А	10	20
В	30	10
С	30	20

Стоимость 1 г продукта А составляет 14 у. е., продукта В – 15 у. е., продукта С – 18 у. е. Составьте смесь продуктов А, В и С, содержащую не менее 200 мг. Микроэлемента М и 300 мг. Микроэлемента N при условии минимальных затрат на приобретение ее составляющих.

Решение. Обозначим через x_1 количество продукта А в составляемой смеси, через x_2 – количество продукта В, через x_3 – количество продукта С. Тогда стоимость смеси

$$f=14x_1+15x_2+18x_3 \rightarrow \min$$

а ограничения запишем в виде

$$\begin{cases} 10x_1 + 30x_2 + 30x_3 \geq 200, \\ 20x_1 + 10x_2 + 20x_3 \geq 300, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Имеем задачу на отыскание минимума. Преобразуем ее к виду, при котором требуется найти максимум целевой функции. Для этого рассмотрим функцию

$$f^* = -f = -14x_1 - 15x_2 - 18x_3.$$

Естественно, что при $f \rightarrow \min$ имеем $f^* \rightarrow \max$. Для того чтобы в ограничениях можно было использовать знак « $\leq$ », умножим два первых неравенства системы на -1. в результате получим:

$$\begin{cases} -10x_1 - 30x_2 - 30x_3 \geq -200, \\ -20x_1 - 10x_2 - 20x_3 \geq -300, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$f^* = -14x_1 - 15x_2 - 18x_3 \rightarrow \max$$

Запишем условие задачи в канонической форме:

$$\begin{cases} -10x_1 - 30x_2 - 30x_3 + x_4 = -200, \\ -20x_1 - 10x_2 - 20x_3 + x_5 = -300, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, \end{cases}$$

$$f^* = -14x_1 - 15x_2 - 18x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max$$

Для применения симплекс-метода строим первую симплекс-таблицу (табл.2.1).

Таблица 2.1

Базис	c_b	a_{i0}	-14	-15	-18	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	0	-200	-10	-30	-30	1	0
x_5	0	-300	-20	-10	-20	0	1
Индексная строка	f^*	0	14	15	18	0	0

Как видно из таблицы, в индексной строке нет отрицательных элементов, однако они имеются в столбце свободных членов a_{i0} . Для решения таких задач используются *двойственный симплекс-метод*. В этом случае в качестве разрешающей строки выбирают строку с наибольшим по модулю отрицательным свободным членом (в нашем примере строку x_5).

Рассмотрим далее отношения элементов индексной строки к модулям соответствующих отрицательных элементов разрешающей строки. Минимальное значение среди таких отношений определит разрешающий столбец:

$$\min(14/20, 15/10, 18/20) = \min(7/10, 15/10, 9/10) = 0,7$$

Следовательно, разрешающим будет столбец x_1 . Определим также разрешающий элемент. Он находится на пересечении выбранных нами строки x_5 и столбца x_1 и равен -20.

Переход ко второй симплекс-таблице осуществляется по тем же правилам, что и в обычном симплекс-методе: элементы разрешающей строки делим на -20 и от других строк таблицы отнимаем разрешающую строку, умноженную на некоторое число, так, чтобы в столбце с разрешающим элементом все остальные числа были равны нулю. В результате получает табл. 2.2.

Таблица 2.2

Базис	c_b	a_{i0}	-14	-15	-18	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	0	-50	0	-25	-20	1	-1/2
x_1	-14	15	1	1/2	1	0	-1/20
Индексная строка	$\int^*$	-210	0	8	4	0	14/20

В табл. 2.2 в столбце a_{i0} имеется отрицательный элемент, следовательно, полученный план не является оптимальным. Для его дальнейшего улучшения находим разрешающий элемент в строке с отрицательным свободным членом (в строке x_4).

$$\min(8/25, 4/20, (14/20)/(1/2)) = \min(32/100, 20/100, 140/100) = 0.2$$

Таким образом, разрешающий элемент равен -20. вновь преобразуя симплекс-таблицу по описанным выше правилам, получим табл. 2.3

Таблица 2.3

Базис	c_b	a_{i0}	-14	-15	-18	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	-18	2,5	0	5/4	1	-1/20	1/40
x_1	-14	12,5	1	-3/4	0	1/20	-3/40
Индексная строка	$\int^*$	-220	0	3	0	4/20	12/20

Так как все $a_{i0} > 0$, найденное решение $x_1=12,5$, $x_2=0$, $x_3=2,5$, $x_4=0$, $x_5=0$ является оптимальным. Значение целевой функции

$$f = -f^* = 220 \text{ (y.e.)}.$$

ЗАДАНИЯ

2.1. Имеются продукты А, В и С, 100 г каждого из которых содержит следующее количество микроэлементов М, N и Р.

Продукты	Содержание микроэлементов, мг		
	М	N	Р
А	0	10	20
В	20	10	20
С	10	20	30

Стоимость 100 г. продукта А составляет 16 у. е., продукта В – 18 у. е., продукта С – 30 у.е. Составьте смесь продуктов А, В и С, содержащую не менее 100 мг. микроэлемента М, 500 мг. микроэлемента N и 600 мг. микроэлемента Р при условии минимальных затрат на приобретение ее составляющих.

Решите задачи линейного программирования:

$$2.2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$f = 19x_1 + 5x_2 + 29x_3 \rightarrow \min$$

$$2.3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 40, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 30, \\ -x_1 - x_2 + x_3 \geq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$f = 8x_1 + 5x_2 + 16x_3 \rightarrow \min$$

$$2.4. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 20, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 40, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 50, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$f = 13x_1 + 19x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$$

$$2.5. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 50, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 70, \\ 2x_1 + x_2 \geq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$f = 28x_1 + 27x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$2.6. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 20, \\ x_1 \geq 40, \\ 2x_2 + x_3 \geq 40, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$f = 8x_1 + 14x_2 + 6x_3 \rightarrow \min$$

$$2.7. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20, \\ x_2 \geq 60, \\ 3x_2 + x_3 \geq 60, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$f = 14x_1 + 19x_2 + 11x_3 \rightarrow \min$$

2.2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДИНИЯ

Пример решения задачи на составление оптимального плана графическим методом был рассмотрен в предыдущем практическом занятии. Серьезным недостатком графического метода решения таких задач является невозможность его использования в том случае, когда количество переменных оказывается

больше двух. Тогда применяется универсальный метод решения задач линейного программирования *симплекс-метод*. Его принцип заключается в последовательном переходе от одного опорного плана к другому, более близкому к оптимальному, пока задача не будет решена (т.е. будет достигнут оптимальный план).

Использование симплекс-метода рассмотрим на примере задачи с ДВУМЯ переменными. Решим симплекс-методом задачу 2 из предыдущего практического занятия и сравним полученные результаты с результатами, найденными графическим методом. Затем рассмотрим применение симплекс-метода для решения задач, содержащих более двух переменных.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 2.2.1. Решите симплекс-методом задачу 2 из предыдущего практического занятия.

Напомним, что условие задачи формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 140 \\ 3x_1 + x_2 \leq 150 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 180 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Решение. Запишем условие задачи в канонической форме. Для этого введем вспомогательные переменные x_3, x_4, x_5 так чтобы имеющиеся неравенства преобразовать в уравнения

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 140 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 150 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 180 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max$$

Положив основные переменные равными нулю ($x_1=0, x_2=0$), а вспомогательные переменные равными свободным членам в правых частях уравнений ($x_3 = 140, x_4=150, x_5 =180$), получим опорное решение, соответствующее нулевым объемам выпуска продукции вида *A* и *B*. Далее следует проверить, является ли найденное опорное решение оптимальным. Если целевая функция еще не достигла максимума, то преобразуем найденное решение по определенным правилам, и будем поступать так до тех пор, пока не получим оптимальный план.

Для реализации симплекс-метода условие задачи удобно представить в виде таблицы, построенной по следующим правилам:

1) в верхнюю строку таблицы вместе с переменными выписываем коэффициенты целевой функции $f = 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$ (числа 2, 3, 0, 0, 0);

2) далее рассматриваем базис, состоящий из вспомогательных переменных. Эти переменные записываем в первый столбец таблицы, а в следующем столбце указываем коэффициенты $c_{i0}, i = 1, 2, 3$, в целевой функции f , стоящие при выбранных базисных переменных;

3) в третий столбец вносим численные значения переменных из полученного выше опорного решения ($x_1=0, x_2=0, x_3=140, x_4=150, x_5=180$). Так как базисными являются переменные x_3, x_4, x_5 , в третьем столбце записываем числа 140, 150, 180, являющиеся правыми частями уравнений;

4) переменные, не входящие в базис, считаем равными нулю и не показываем их в таблице отдельными строками:

5) в остальные столбцы таблицы вносим коэффициенты при неизвестных из левых частей исходных уравнений. Если в уравнении соответствующая переменная отсутствует, то коэффициент при ней считаем равным нулю;

6) элементы последней строки таблицы, называемой *индексной*, подсчитываются по следующим формулам:

для столбца a_{i0}

$$c_{10}a_{10} + c_{20}a_{20} + c_{30}a_{30} = 0 \cdot 140 + 0 \cdot 150 + 0 \cdot 180 = 0$$

для столбцов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ,

$$c_{10}a_{11} + c_{20}a_{21} + c_{30}a_{31} - c_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3 - 2 = -2$$

$$c_{10}a_{12} + c_{20}a_{22} + c_{30}a_{32} - c_2 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 3 = -3$$

$$c_{10}a_{13} + c_{20}a_{23} + c_{30}a_{33} - c_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$$

$$c_{10}a_{14} + c_{20}a_{24} + c_{30}a_{34} - c_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$$

$$c_{10}a_{15} + c_{20}a_{25} + c_{30}a_{35} - c_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0$$

Таким образом, элементы индексной строки при построении первой симплекс-таблицы для опорного плана равны коэффициентам при неизвестных в целевой функции, взятым с противоположным знаком.

В результате выполнения описанных операций получим табл. 2.2.1.

Таблица 2.2.1

Базис	c_0	a_{i0}	2	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	140	1	2	1	0	0
x_4	0	150	3	1	0	1	0
x_5	0	180	3	2	0	0	1
Индексная строка	f	0	-2	-3	0	0	0

Наличие отрицательных чисел в индексной строке говорит о том, что данный план не является оптимальным. Для перехода к улучшенному плану выберем столбец с наименьшим отрицательным числом в индексной строке (столбец x_2 , число -3). В этом столбце найдем разрешающий элемент, для которого отношение a_{i0}/a_{ij} вычисленное для всех $a_{ij} > 0$, будет минимальным:

$$\min (140/2, 150/1, 180/2) = \min (70, 150, 90) = 70.$$

Таким образом, разрешающим элементом является число 2 (в табл. 2.2.1 оно заключено в рамку), а разрешающей строкой - первая строка.

Определив разрешающую строку, перейдем к построению новой таблицы. В ней вместо переменной x_3 , (соответствующей разрешающей строке) вводим в базис переменную x_2 (соответствующую выбранному столбцу). Изменения вносим и во второй столбец таблицы, где указывается коэффициент в целевой функции при новой базисной переменной x_2 (число 3). Все остальные элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент (число 2):

$$140/2=70, 1/2=1/2, 2/2=1, 1/2=1/2, 0/2=0, 0/2=0.$$

Получаем табл. 2.2.2

Таблица 2.2.2

Базис	c_6	a_{i0}	2	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	3	70	1/2	1	1/2	0	0
x_4	0						
x_5	0						
Индексная строка	f						

Остальные строки таблицы преобразуем следующим образом: вычтем из всех элементов строки соответствующие элементы новой разрешающей строки, умноженные на одно и то же число, такое, чтобы в столбце с разрешающим элементом в преобразованной строке получился нуль.

Нетрудно заметить, что для выполнения такого преобразования i -и строки от нее следует отнять новую разрешающую строку, умноженную на элемент, стоящий в i -и строке в разрешающем столбце. В нашем случае необходимо:

- от элементов строки x_4 отнять соответствующие элементы новой разрешающей строки (см. табл. 2.2.2), умноженные на 1;
- от элементов строки x_5 отнять соответствующие элементы новой разрешающей строки, умноженные на 2;
- от элементов индексной строки отнять соответствующие элементы новой разрешающей строки, умноженные на -3, т.е. к элементам индексной строки прибавить элементы новой разрешающей строки, умноженные на 3.

Элементы строки x_4 преобразуются следующим образом:

$$150-70 \cdot 1=80, \quad 3-(1/2) \cdot 1=5/2, \quad 1-1 \cdot 1=0, \quad 0-(1/2) \cdot 1=-1/2, \quad 1-0 \cdot 1=1, \quad 0-0 \cdot 1=0.$$

Элементы строки x_5 преобразуются так:

$$180-70 \cdot 2=40, \quad 3-(1/2) \cdot 2=2, \quad 2-1 \cdot 2=0, \quad 0-(1/2) \cdot 2=-1, \quad 0-0 \cdot 2=0, \quad 1-0 \cdot 2=1.$$

Наконец, в результате преобразования элементов индексной строки имеем:

$$0+70 \cdot 3=210, \quad -2+(1/2) \cdot 3=-1/2, \quad -3+1 \cdot 3=0, \quad 0+(1/2) \cdot 3=3/2, \quad 0+0 \cdot 3=0, \quad 0+0 \cdot 3=0.$$

В результате всех описанных преобразований получим табл. 2.2.3:

Таблица 2.2.3

Базис	c_6	a_{i0}	2	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	3	70	1/2	1	1/2	0	0
x_4	0	80	5/2	0	-1/2	1	0
x_5	0	40	2	0	-1	0	1
Индексная строка	f	210	-1/2	0	3/2	0	0

Найденный план ($x_1=0$, $x_2=70$, $x_3=0$, $x_4=80$, $x_5=40$) является улучшенным, так как в этом случае значение целевой функции

$$f = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 70 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 80 + 0 \cdot 40 = 210$$

(для первого опорного плана $f=0$). Однако наличие отрицательного элемента в индексной строке говорит о том, что и данный план не является оптимальным.

Для его дальнейшего улучшения находим наименьшее отрицательное число в индексной строке (столбец x_1 число -1/2) и определяем разрешающий элемент:

$$\min (70/(1/2), 80/(5/2), 40/2) = \min(140, 32, 20)=20.$$

Тогда разрешающий элемент равен 2, а разрешающей строкой является третья.

Для перехода к новой таблице элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент 2:

$$40/2=20, \quad 2/2=1, \quad 0/2=0, \quad -1/2=-1/2, \quad 0/2=0, \quad 1/2=1/2.$$

Для получения нуля на пересечении строки x_2 и столбца x_1 от элементов строки x_2 следует отнять элементы новой разрешающей строки, умноженные на 1/2:

$$70-20 \cdot (-1/2)=60, \quad 1/2-1 \cdot (1/2)=0, \quad 1-0 \cdot (1/2)=1,$$

$$1/2 + (1/2)(1/2) = 3/4, \quad 0 - 0 \cdot (1/2) = 0, \quad 0 - (1/2)(1/2) = -1/4.$$

Для получения нуля на пересечении строки x_4 и столбца x_1 от элементов строки x_4 следует отнять элементы новой разрешающей строки, умноженные на $5/2$:

$$\begin{aligned} 80 - 20(5/2) &= 30, & 5/2 - 1 \cdot (5/2) &= 0, & 0 - 0 \cdot (5/2) &= 0, \\ -1/2 + (1/2)(5/2) &= 3/4, & 1 - 0 \cdot (5/2) &= 1, & 0 - (1/2)(5/2) &= -5/4. \end{aligned}$$

Для получения нуля на пересечении индексной строки и столбца x_1 от элементов индексной строки следует отнять элементы новой разрешающей строки, умноженные на $-1/2$ (прибавить элементы новой разрешающей строки, умноженные на $1/2$):

$$\begin{aligned} 210 + 20(1/2) &= 220, & -1/2 + 1 \cdot (1/2) &= 0, & 0 + 0 \cdot (1/2) &= 0, \\ 3/2 - (1/2)(1/2) &= 5/4, & 0 + 0 \cdot (1/2) &= 0, & 0 + (1/2)(1/2) &= 1/4. \end{aligned}$$

В результате получим табл. 2.2.4.

Таблица 2.2. 4

Базис	c_6	a_{i0}	2	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	3	60	0	1	3/4	0	-1/4
x_4	0	30	0	0	3/4	1	-5/4
x_1	2	20	1	0	-1/2	0	1/2
Индексная строка	f	220	0	0	5/4	0	1/4

Так как в индексной строке нет отрицательных элементов, полученный план является оптимальным, т.е. максимальная прибыль будет достигнута при плане $x_1 = 20$, $x_2 = 60$:

$$f = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 60 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 30 + 0 \cdot 0 = 220$$

Значение переменной $x_4 = 30$ показывает, что при таком плане неиспользованный остаток сырья вида N составит 30 т. Полученные результаты полностью соответствуют ответу, найденному графическим методом.

В более компактной форме решение этой задачи записано в табл. 2.2.5.

Таблица 2.2.5

Базис	c_6	a_{i0}	2	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	140	1		1	0	0
x_4	0	150	3	1	0	1	0
x_5	0	180	3	2	0	0	1
	f	0	-2	-3	0	0	0
x_2	3	70	1/2	1	1/2	0	0
x_4	0	80	$\frac{5/2}{2}$	0	-1/2	1	0
x_5	0	40		0	-1	0	1
	f	210	-1/2	0	3/2	0	0
x_2	3	60	0	1	3/4	0	-1/4
x_4	0	30	0	0	3/4	1	-5/4
x_1	2	20	1	0	-1/2	0	1/2
	f	220	0	0	5/4	0	1/4

Пример 2.2.2. Предприятие выпускает изделия трех видов A , B и C , для производства которых требуется сырье трех видов M , N , P в следующих количествах:

Вид сырья	Потребности сырья, т, для производства 1 т продукции вида		
	A	B	C
M	1	2	1
N	2	1	2
P	1	4	1

Запасы сырья вида M составляют 100 т, вида N - 150 т, вида P - 180 т. Продажа 1 т продукции вида A дает прибыль, 2 у. е., продукции вида B - 3 у.е., продукции вида C - 4 у.е. Определите, какое количество продукции вида A , B , C следует выпускать предприятию для получения максимальной прибыли.

Решение. Обозначим через x_1 , объем производства продукции вида A , через x_2 - объем производства продукции вида B , а через x_3 - объем производства продукции вида C . Тогда прибыль от реализации продукции вида A , B и C

$$f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

ограничения на затраты сырья имеют вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 150 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 180 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Запишем условие задачи в канонической форме. Для этого введем вспомогательные переменные x_4, x_5, x_6 так, чтобы неравенства преобразовать в уравнения

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 150 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_6 = 180 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \rightarrow \max$$

Решение задачи оформим в виде табл. 2.2.6, полученной по аналогии с табл. 2.2.5 (правильность расчетов проверьте самостоятельно).

Таблица 2.2. 6

Базис	c_6	a_{i0}	2	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0	100	1	2	1	1	0	0
x_5	0	150	2	1	2	0	1	0
x_6	0	180	1	4	1	0	0	1
	f	0	-2	-3	-4	0	0	0
x_4	0	25	0	3/2	0	1	-1/2	0
x_3	4	75	1	1/2	1	0	1/2	0
x_6	0	105	0	7/2	0	0	-1/2	1

	f	300	2	-1	3/2	0	2	0
x_2	3	50/3	0	1	0	2/3	-1/3	0
x_3	4	200/3	1	0	1	-1/3	2/3	0
x_6	0	140/3	0	0	0	-7/3	2/3	1
	f	950/3	2	0	0	2/3	5/3	0

В результате имеем оптимальный план $(0, 50/3, 200/3, 0, 0, 140/3)$, при котором значение целевой функции

$$f = 2 \cdot 0 + 3 \cdot (50/3) + 4 \cdot (200/3) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 140/3 = 950/3$$

ЗАДАНИЯ

2.1. Для изготовления продукции трех видов A , B и C используется токарное, фрезерное и сварочное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия на каждом виде оборудования приведены ниже.

Вид продукции	Затраты времени, ч		
	Токарное оборудование	Фрезерное оборудование	Сварочное оборудование
A	10	3	4
B	2	5	4
C	4	5	3

На предприятии имеется 8 токарных станков, 6 фрезерных станков и 5 сварочных аппаратов. Оборудование используется по 10 ч в день. Таким образом, в течение дня токарное оборудование может эксплуатироваться 80 ч, фрезерное - 60 ч и сварочное - 50 ч. Определите план выпуска продукции с целью получения максимальной прибыли, если прибыль от реализации продукции вида A составляет 5 у. е., продукции вида B — 3 у. е. продукции вида C - 6 у. е.

2.2.. Для производства 1 т продукции каждого из трех видов A , B и C используется сырье двух видов M и N в следующих количествах:

Вид сырья	Продукция, т		
	А	В	С
М	2	2	4
Н	2	4	3

Запасы сырья вида *М* и *Н* на предприятии составляют по 40 т каждого. Для выпуска 1 т продукции вида *А* требуется задействовать производственные мощности предприятия на 5 ч, для выпуска 1 т продукции вида *В* — на 7 ч, для выпуска 1 т продукции вида *С* - на 4 ч. Фонд времени использования оборудования за неделю - 70 ч. Составьте план выпуска продукции на неделю с целью получения максимальной прибыли, если прибыль от реализации 1 т продукции вида *А* составляет 5 у. е., продукции вида *В*- 3 у.е., продукции вида *С*-6у.е.

Решите задачи линейного программирования симплекс – методом

$$1 \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 200 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 140 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

$$2 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 200 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 210 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 390 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \rightarrow \max$$

$$3 \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 240 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 240 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 170 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 220 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

5

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 160 \\ 2x_1 + x_3 \leq 100 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

6

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 270 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 290 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \rightarrow \max$$

2.3 ПРИМЕНЕНИЕ ОЦЕНОК В ПОСЛЕОПТИМИЗАЦИОННОМ АНАЛИЗЕ

Применение оценок в послеоптимизационном анализе покажем на примере задачи определения оптимального ассортимента выпускаемой продукции.

Пример 2.1. Предприятие может выпускать n видов продукции $П_j$ ($j=1, n$). Для этого используется m видов ресурсов. Общий объем ресурсов b_i ($i=1, m$) и нормы их расхода на единицу продукции j -го вида (a_{ij}) представлены далее: $c_1=75, c_2=30, c_3=60, c_4=120, b_1=2400, b_2=1200, b_3=3000$,

$a_{11} = 2$	$a_{21}=1$	$a_{31}=3$	$c_5=80$
$a_{12} = 1$	$a_{22}=5$	$a_{32}=0$	$a_{15}=2$
$a_{13} = 0.5$	$a_{23}=3$	$a_{33}=6$	$a_{25}=4$
$a_{14} = 4$	$a_{24}=0$	$a_{34}=1$	$a_{35}=3$

1. Определить оптимальный ассортимент выпускаемой продукции, доставляющий предприятию максимум выручки.

2. Составить модель двойственной задачи. Используя соответствие между переменными прямой и двойственной задач, выписать оптимальное решение двойственной задачи. Дать содержательный экономический анализ основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач.

3. Построить матрицу $[\eta_{ik}]$ коэффициентов взаимозаменяемости ресур-

сов. Дать экономическую интерпретацию ее элементов.

4. Оценить рентабельность новой продукции и ее цену, характеристики которой c_{n+1} и $a_{i,n+1}$ представлены в табл. 2.3.1.

5. Определить границы изменения коэффициентов целевой функции, в пределах которых ассортимент выпускаемой продукции не меняется.

6. Определить границы изменения ресурсов, в пределах которых сохраняется устойчивость двойственных оценок.

Решение. Сведем исходные данные варианта в удобную для построения математической модели табл. 2.3.2

Таблица 2.3.2

Ресурсы	Продукция				Объем ресурса	P_5
	P_1	P_2	P_3	P_4		
I	2	1	0,5	4	2400	$a_{15}=2$
II	1	5	3	0	1200	$a_{45}=4$
III	3	0	6	1	300	$a_{35}=3$
Цена реализации	75	30	60	120	-	$c_5=180$
План x	x_1	x_2	x_3	x_4	-	x_5

Решение. 1. Пусть $x = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ — план выпуска продукции соответственно P_1, P_2, P_3, P_4 ; Z — сумма выручки от реализации готовой продукции. Тогда математическая модель задачи примет вид

$$\begin{aligned} \max Z = & 75x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 120x_4; \\ & 2x_1 + x_2 + 0,5x_3 + 4x_4 \leq 2400, \\ & x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 1200, \\ & 3x_1 + \quad + 6x_3 + x_4 \leq 3000, \\ & x_j \geq 0 \quad (j=1,4) \end{aligned}$$

Решение задачи симплексным методом представлено в табл. 2.3.3.

Таблица 2.3.3

БП	c_B	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			75	30	60	120	0	0	0
x_5	0	2400	2	1	$\frac{1}{2}$	4	1	0	0
x_6	0	1200	1	5	3	0	0	1	0
x_7	0	3000	3	0	6	1	0	0	1
$z_j - c_j$		0	-75	-30	-60	-120	0	0	0
x_4	120	600	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0

x_6	0	1200	1	5	3	0	0	1	0
x_7	0	2400	$5/2$	$-1/4$	$47/8$	0	$-1/4$	0	1
$z_j - c_j$		72000	-15	0	-45	0	30	0	0
x_4	120	550	$11/24$	$1/24$	0	1	$1/4$	$-1/24$	0
x_3	60	400	$1/3$	$5/3$	1	0	0	$1/3$	0
x_7	0	50	$13/24$	$-241/24$	0	0	$-1/4$	$-47/24$	1
$z_j - c_j$		90000	0	75	0	0	30	15	0
			y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3

Так как все оценки индексной строки в последней симплексной таблице 2.3.3 неотрицательны, то найденный опорный план оптимален:

$$x^* = (0; 0; 400; 550; 0; 0; 50), \quad z(x^*) = 90000.$$

Основные переменные $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 400$, $x_4^* = 550$ показывают, что продукцию первого и второго вида выпускать нецелесообразно, продукции третьего вида следует выпускать 400 ед., четвертого — 550 ед. При этом, так как $x_5^* = x_6^* = 0$, первый и второй ресурсы используются полностью, а третьего остается в избытке 50 ед. ($x_7^* = 50$). Единствен ли полученный в табл. 2.3.3 оптимальный план? Нет. Так как оценка, соответствующая свободной переменной x_1 , равна нулю ($\Delta_1 = 0$), то, введя в базис переменную x_1 , получим новый оптимальный план с тем же самым значением целевой функции.

2. Модель двойственной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \min f &= 2400 y_1 + 1200 y_2 + 3000 y_3; \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 &\geq 75, \\ y_1 + 5y_2 + 5y_3 &\geq 30, \\ 0,5y_1 + 3y_2 + 60y_3 &\geq 60, \\ 4y_1 + y_3 &\geq 120, \\ y_i &\geq 0 \quad (i = 1, 3). \end{aligned}$$

Ее решение выпишем из последней симплексной таблицы 2.3.3, используя соответствие переменных:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3

$$\text{Имеем: } y^* = (30; 15; 0; 0; 75; 0; 0), \quad f(y^*) = 90\,000.$$

Двойственные переменные показывают меру дефицитности ресурсов, они численно равны изменению целевой функции при изменении соответствующего ресурса на единицу. Следовательно, увеличение первого ресурса на единицу ведет к увеличению объема реализации на $y_1^* = 30$, второго — на $y_2^* = 15$.

Третий ресурс избыточен, поэтому его увеличение ни к чему не приведет, т. е. значение функции останется прежним ($y_3^* = 0$).

Дополнительные двойственные переменные являются мерой убыточности продукции, которую, согласно оптимальному плану, нецелесообразно выпускать. Следовательно, $y_5^* = 75$ говорит о том, что стоимость ресурсов, расходуемых на единицу производства продукции второго вида (в оптимальных оценках), превосходит стоимость единицы этой продукции ($c_2 = 30$) на $y_5^* = 75$. В самом деле,

$$a_{12}y_1^* + a_{22}y_2^* + a_{32}y_3^* = 1 \cdot 30 + 5 \cdot 15 + 0 \cdot 0 = 105, \\ 105 - 30 = 75.$$

Раскроем состав двойственных переменных:

$$y_1^* = 1/4 \cdot 120 + 0 \cdot 60 - 1/4 \cdot 0 = 30, \\ y_2^* = -1/24 \cdot 120 + 1/3 \cdot 60 - 47/24 \cdot 0 = 15, \\ y_3^* = 0 \cdot 120 + 0 \cdot 60 - 1 \cdot 0 = 0,$$

Экономически, например для $y_1^* = 30$, это означает следующее: при увеличении первого ресурса на единицу выпуск продукции первого вида возрастет на $1/4$ и составит 550,25, выпуск продукции второго вида не изменится, остаток избыточного ресурса сократится на — 0,25. Следовательно, значение целевой функции изменится на

$$550,25 \cdot 120 - 550 \cdot 120 = 30.$$

Аналогично для второго ресурса:

$$(550 - 1/24) \cdot 120 + (400 + 1/3) \cdot 60 + (50 - 47/24) \cdot 0 - 90000 = 15$$

3. Коэффициенты взаимозаменяемости η_{ik} показывают, сколько единиц ресурса i необходимо дополнительно иметь, чтобы компенсировать уменьшение ресурса k на единицу, т. е. чтобы значение целевой функции не изменилось: $\eta_{ik} = y_k^* / y_i^*$

Построим матрицу взаимозаменяемости (табл. 2.3.4).

Таблица 2.3.4

$i \backslash k$	1 ($y_1^* = 30$)	2 ($y_2^* = 15$)	3 ($y_3^* = 0$)
1 ($y_1^* = 30$)	1	1/2	0
2 ($y_2^* = 15$)	2	1	0
3 ($y_3^* = 0$)	∞	∞	1

Например, $\eta_{21} = 2$ означает, что уменьшение первого ресурса на единицу можно компенсировать двумя единицами второго ресурса и т. д.; $\eta_{31} = \infty$ означает, что уменьшение первого ресурса на единицу никаким увеличением третьего ресурса компенсировать нельзя; $\eta_{13} = 0$ означает, что, так как третий ресурс избыточен, его уменьшение на единицу компенсировать ничем не следует.

4. Оценим эффективность выпуска новой продукции с характеристиками $c_5=80$, $a_{15} = 2$, $a_{25} = 4$, $a_{35} = 3$. Стоимость ресурсов, расходуемых на единицу этой продукции, составит

$$a_{15}y_1^* + a_{25}y_2^* + a_{35}y_3^* = 2 \cdot 30 + 4 \cdot 15 + 3 \cdot 0 = 120.$$

Выручка же за каждую единицу равна $c_5=180$. Следовательно, выпускать эту продукцию целесообразно. Продукция P_2 будет рентабельной при установлении ее цены $c_5 \geq 120$.

5. Для определения границ изменения коэффициентов целевой функции c_j , в пределах которых сохраняется ассортимент выпускаемой продукции, рассмотрим два случая.

а) Анализ коэффициентов целевой функции при свободных переменных $c_1 = 75$, $c_2 = 30$. Заменяя $c_1 = 75$ на $c_1 = 75 + \Delta c_1$, получим, что в последней симплексной таблице 2.3.3 изменится только строка $z_j - c_j$. Она примет вид, представленный в табл. 2.3.5.

табл. 2.3.5

БП	c_B	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			$75 + \Delta c_1$	30	60	120	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$z_j - c_j$		90000	$0 - \Delta c_1$	75	0	0	30	15	0

Отсюда $0 - \Delta c_1 \geq 0$, т. е. $\Delta c_1 \leq 0$, $-\infty < \Delta c_1 \leq 0$? $-\infty < c_1 \leq 75$. Так как $c_j \geq 0$, то $0 \leq c_1 \leq 75$. Аналогично для $c_2 = 30$ получим табл. 2.3.6.

табл. 2.3.6.

БП	c_B	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			75	$30 + \Delta c_1$	60	120	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$z_j - c_j$		90000	$0 - \Delta c_1$	75	0	0	30	15	0

Отсюда $75 - \Delta c_2 \geq 0$, т. е. $-\infty < \Delta c_2 \leq 75$, $-\infty < c_2 \leq 30 + 75$. Так как $c_j \geq 0$, то $0 \leq c_2 \leq 105$.

б) Анализ коэффициентов целевой функции при базисных переменных $c_3 = 60$, $c_4 = 120$. Сделаем анализ коэффициента $c_3 = 60$. Заменяя c_3 на $c_3 = 60 + \Delta c_3$, получим последнюю симплексную таблицу 2.3.7, откуда имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} \Delta c_3 &\geq 0, \\ 75 + \frac{5}{3} \Delta c_3 &\geq 0, \\ 15 + \frac{1}{3} \Delta c_3 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta c_3 &\geq 0, \\ \Delta c_3 &\geq -45, \\ \Delta c_3 &\geq -45 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 \leq \Delta c_3 < \infty, 60 \leq \Delta c'_3 < \infty,$$

Таблица 2.3.7

БП	с _Б	A ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
			75	30	60+Δc ₃	120	0	0	0
x ₄	120	550	11/24	1/24	0	1	1/4	-1/24	0
x ₃	60+Δc ₃	400	1/3	5/3	1	0	0	1/3	0
x ₇	0	50	13/24	-241/24	0	0	-1/4	-47/24	1
z _j -c _j		90000+550Δc ₃	0+1/3Δc ₃	75+5/3Δc ₃	0	0	30+0Δc ₃	15+1/3Δc ₃	0

Таблица 2.3.8

БП	с _Б	A ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
			75	30	60	120+Δc ₄	0	0	0
x ₄	120+Δc ₄	550	11/24	1/24	0	1	1/4	-1/24	0
x ₃	60	400	1/3	5/3	1	0	0	1/3	0
x ₇	0	50	13/24	-241/24	0	0	-1/4	-47/24	1
z _j -c _j		90000+550Δc ₄	0+11/24Δc ₄	75+1/24Δc ₄	0	0	30+0Δc ₄	15-1/24Δc ₄	0

Аналогично для коэффициента c₄= 120 получим табл. 2.3.8, откуда имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{11}{24} \Delta \tilde{n}_4 &\geq 0 \\ 75 + \frac{1}{24} \Delta \tilde{n}_4 &\geq 0 \\ 30 + \frac{1}{4} \Delta \tilde{n}_4 &\geq 0 \\ 15 - \frac{1}{24} \Delta \tilde{n}_4 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_4 &\geq 0 \\ \Delta \tilde{n}_4 &\geq -1800 \\ \Delta \tilde{n}_4 &\geq -120 \\ \Delta \tilde{n}_4 &\geq 360 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 \leq \Delta \tilde{n}_4 \leq 360, 120 \leq \Delta \tilde{n}'_4 \leq 120 + 360, 120 \leq c'_4 \leq 480$$

6. При анализе ограничений по ресурсам возникает вопрос: в каких пределах может изменяться ресурс, чтобы структура оптимального плана сохранилась, чтобы по-прежнему рентабельной оставалась продукция П₃ и П₄

Рассмотрим два случая.

а) Анализ дефицитных ресурсов $b_1 = 2400$, $b_2 = 1200$. Заменяем b_1 на $b'_1 = b_1 + \Delta b_1$. Тогда последняя симплексная таблица 2.3.3 примет вид табл. 2.3.9.

Таблица 2.3.9.

БП	c_B	A_0	... x_5 ...
			... 0 ...
1	2	3	4
x_5	120	$550 + \frac{1}{4} \Delta b_1$	$\frac{1}{4}$
x_5	60	$400 + 0 \Delta b_1$	0
x_5	0	$55 - \frac{1}{4} \Delta b_1$	-1/4
$z_j - c_j$		$90000 + 30 \Delta b_1$	30

Так как оптимальный план — опорный, то $x_j^* \geq 0$. Отсюда

$$\left. \begin{array}{l} 550 + \frac{1}{4} \Delta b_1 \geq 0, \\ 50 - \frac{1}{4} \Delta b_1 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Delta b_1 \geq -2200, \\ \Delta b_1 \geq 200 \end{array} \right\} \Rightarrow -2200 \leq \Delta b_1 \leq 200, \quad b_1 - 2200 \leq b'_1 \leq b_1 + 200,$$

$$2400 - 2200 \leq b'_1 \leq 2400 + 200, \quad 200 \leq b'_1 \leq 2600$$

Аналогично для $b_2 = 1200$. Заменяем b_2 на $b'_2 = 1200 + \Delta b_2$, получим:

$$\left. \begin{array}{l} 550 - \frac{1}{24} \Delta b_2 \geq 0, \\ 400 - \frac{1}{3} \Delta b_2 \geq 0, \\ 50 - \frac{47}{24} \Delta b_2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Delta b_2 \leq 13200 \\ \Delta b_2 \geq -1200 \\ \Delta b_2 \leq 25,54 \end{array} \right\} \Rightarrow -1200 \leq \Delta b_2 \leq 25,54,$$

$$1200 - 1200 \leq b'_2 \leq 1200 + 25,54,$$

$$-0 \leq b'_2 \leq 1225,54,$$

б) Анализ недефицитного ресурса $b_3 = 3000$. Заменяем b_3 на $b'_3 = 3000 + \Delta b_3$ получим:

$$50 + 1 \cdot \Delta b_3 \geq 0, \quad -50 \leq \Delta b_3 < \infty, \quad 30000 - 50 \leq b'_3 < \infty, \quad 29950 \leq b'_3 < \infty,$$

3. РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется пунктов n отправления $A_1, A_2, \dots, A_n$ с запасами товара $a_1, a_2, \dots, a_n$ соответственно и m пунктов назначения $B_1, B_2, \dots, B_m$, в каждый из которых следует доставить имеющийся товар в количестве $b_1, b_2, \dots, b_m$ соответственно. Известны затраты c_{ij} на перевозку единицы товара из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения для $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$. Необходимо найти такой план перевозки товара, при котором транспортные расходы были бы минимальными, т. е. найти значения x_{ij} – количества товара, перевозимого из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$), для которых

$$\sum c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min.$$

Данную задачу называют *транспортной*. Для ее решения необходимо вначале выбрать некоторый опорный план, а затем осуществлять его последовательное улучшение по определенным правилам до тех пор, пока не будет получен оптимальный план. Рассмотрим методы построения опорного плана и решения транспортной задачи на конкретном примере.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Потребности пяти райпо Гомельского облпотребсоюза в безалкогольных напитках, согласно их заявкам, составляют 12 тыс. бутылок, 14 тыс. бутылок, 12 тыс. бутылок, 13 тыс. бутылок и 17 тыс. бутылок соответственно.

Поставку безалкогольных напитков осуществляют три производственных комбината, мощности которых позволяют выпускать 24 тыс. бутылок, 18 тыс. бутылок и 26 тыс. бутылок соответственно. Стоимость перевозки 1 тыс. бутылок (в условных единицах) с i -го прокомбината на склад (оптовую базу) j -го райпо равна элементу c_{ij} следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдите план перевозок безалкогольных напитков от производителей к потребителям, чтобы затраты на доставку груза были минимальными.

Решение. Введем следующие обозначения: прокомбинаты обозначим через A_1, A_2, A_3 , а райпо – через B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 . Тогда условие задачи можно представить в виде табл.3. 1.

Таблица 3.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2	5	4	2	3	24
A_2	6	1	1	4	4	18
A_3	9	4	3	6	7	26
Потребности	12	14	12	13	17	68

Рассмотрим построение опорного плана *методом северо-западного угла*.

Суть этого метода состоит в том, что клетки таблицы заполняются максимально возможными значениями количества перевозимого груза в следующем порядке:

- 1) вначале заполняется левая верхняя клетка таблицы (12 тыс. бутылок);
- 2) заполняются другие клетки первой строки слева направо до тех пор, пока не будут исчерпаны запасы груза в первом пункте отправления;
- 3) заполняются клетки второй строки таблицы, продолжая с первого слева столбца, соответствующего пункту назначения, потребности которого еще не удовлетворены;
- 4) аналогично заполняются и другие строки, пока не будет заполнена правая нижняя клетка таблицы.

Используя данный метод, получаем табл.3.2.

Таблица 3.2

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2 12	5 12	4	2	3	24
A_2	6	1 2	1 12	4 4	4	18
A_3	9	4	3	6 9	7 17	26
Потребности	12	14	12	13	17	68

Затраты на перевозку составят

$$2*12+5*12+1*2+1*12+4*4+6*9+7*17=287 \text{ (у. е.)}$$

Ясно, что план, полученный таким методом, обычно далек от оптимального, поскольку при заполнении клеток таблицы совершенно не учитывались тарифы перевозок, и поэтому заполненными могли оказаться клетки с наиболее высокими тарифами.

Опорный план, более близкий к оптимальному, как правило, можно получить, если воспользоваться *методом минимального элемента*. Суть метода заключается в том, что в первую очередь производится заполнение клеток таблицы с наименьшим тарифом (в нашей задаче – клеток с тарифом 1), где указывается максимально возможный объем перевозок. Далее выбираем клетки с минимальным тарифом из оставшихся. Их заполнение производится с учетом того, что в таблице уже имеются заполненные клетки. продолжая этот процесс, получаем табл. 3.3.

Таблица 3.3

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2 12	5	4	2 12	3	24
A_2	6	1 14	1 4	4	4	18
A_3	9	4	3 8	6 1	7 17	26
Потребности	12	14	12	13	17	68

Затраты на перевозку в данном случае составят

$$2*12+2*12+1*14+1*4+3*8+6*1+7*17=215 \text{ (у. е).}$$

Таким образом, предлагаемый опорный план уменьшает стоимость перевозок на $287-215=72$ (у. е) по сравнению с планом, полученным методом северо-западного угла.

Следующим этапом решения транспортной задачи является оптимизация найденного опорного плана. Рассмотрим оптимизацию плана *методом потенциалов*. При использовании этого метода важно, чтобы количество заполненных клеток таблицы было равно $m+n-1$ (в нашем случае $3+5-1=7$ клеток). Если количество заполненных клеток оказалось меньшим, в свободные клетки таблицы следует дописать нули и считать эти клетки заполненными. При этом следует выбирать только те свободные клетки, для которых нельзя построить цикл. Под *циклом* для данной клетки понимают замкнутую ломаную, стороны которой получаются при соединении клеток таблицы, находящихся в одной строке или в одном столбце, причем вершины этой ломаной могут находиться только в данной клетке или в заполненных клетках таблицы.

Для построения нового улучшенного плана методом потенциалов обозначим потенциал i -й строки u_i , а потенциал j -го столбца – v_j . Далее, для всех заполненных клеток таблицы запишем уравнения вида

$$u_i + v_j = c_{ij},$$

где c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения. В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_4 = 2, \\ u_2 + v_2 = 1, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_3 + v_3 = 3, \\ u_3 + v_4 = 6, \\ u_3 + v_5 = 7. \end{cases}$$

Полагая $u_1 = 0$, находим решения данной системы:

$$u_1 = 0, u_2 = 2, u_3 = 4, v_1 = 2, v_2 = -1, v_3 = -1, v_4 = 2, v_5 = 3.$$

Далее находим потенциалы пустых клеток таблицы по формуле $c_{ij} - (u_i + v_j)$ и записываем их в эти клетки, заключая в рамки. В результате получаем таблицу 3.4.

Так как среди найденных потенциалов незаполненных клеток имеется отрицательное число, опорный план не является оптимальным. Для клетки с наибольшим по модулю отрицательным потенциалом строим цикл. В табл. 3.4 он показан пунктиром. Все клетки – вершины цикла обозначаются поочередно знаками «+» и «-», начиная с клетки с отрицательным потенциалом, куда вносится знак «+». Далее выбираем наименьшее число из клеток, помеченных знаком «-». В нашем случае это число 4. Добавляем это число к имеющемуся плану перевозок во все клетки, помеченные знаком «+», и вычитаем его же из плана перевозок во всех клетках, помеченных знаком «-». Такое изменение приведет к снижению стоимости перевозок на $|4 * (-1)| = 4$ (у. е.).

Таблица 3.4

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2 12	5 6	4 5	2 12	3 0	24
A_2	6 2	1 14	1 4	4 0	4 -1	18
A_3	9 3	4 1	3 + 8	6 1	7 -17	26
Потребности	12	14	12	13	17	68

В результате получаем новый план перевозок, представленный в табл. 3.5.

Таблица 3.5

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2 12	5	4	2 12	3	24
A_2	6	1 14	1	4	4 4	18
A_3	9	4	3 12	6 1	7 13	26
Потребности	12	14	12	13	17	68

Затраты на перевозку груза по этому составят

$$2*12+2*12+1*14+4*4+3*12+6*1+7*13=211 \text{ (у. е.)},$$

что действительно на 4 у. е. меньше затрат по предыдущему плану.

Проверим, является ли найденный план оптимальным, и при необходимости продолжим его улучшение. Для этого вновь составим систему уравнений для вычисления потенциалов строк и столбцов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_4 = 2, \\ u_2 + v_5 = 4, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_3 + v_3 = 3, \\ u_3 + v_4 = 6, \\ u_3 + v_5 = 7. \end{cases}$$

Полагая $u_1 = 0$, решаем данную систему уравнений, откуда имеем:

$$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 4, v_1 = 2, v_2 = 0, v_3 = -1, v_4 = 2, v_5 = 3.$$

Далее по формуле $c_{ij} - (u_i + v_j)$ вычисляем потенциалы пустых клеток. Найденные результаты записываем в табл. 3.6.

Таблица 3.6

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2 12	5 5	4 5	2 12	3 0	24
A_2	6 14	1 14	1 12	4 1	4 13	18
A_3	9 3	4 0	3 12	6 1	7 13	26
Потребности	12	14	12	13	17	68

Отсутствие отрицательных чисел говорит о том, что данный план является оптимальным, т. е. задача решена. Следует отметить, что наличие нулевого потенциала в клетках таблицы свидетельствует о том, что данное решение не является единственным, так как при изменении плана перевозок по циклу, построенному для какой-либо из этих клеток, затраты на перевозку останутся на прежнем уровне.

ЗАДАНИЯ

Решите транспортные задачи

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	4	5	6	4	3	300
A_2	7	4	4	4	2	500
A_3	1	2	3	6	3	200
Потребности	320	100	180	150	250	1000

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2	6	4	5	3	400
A_2	1	4	2	1	4	300
A_3	3	4	2	2	3	200
Потребности	200	150	250	200	100	900

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	1	4	3	2	240
A_2	6	1	2	4	220
A_3	3	4	5	4	240
Потребности	140	160	220	180	700

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3	4	3	2	320
A_2	7	3	5	4	150
A_3	7	3	2	4	150
Потребности	180	130	150	160	620

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	6	3	6	2	4	150
A_2	7	2	3	1	3	200
A_3	4	4	1	2	3	160
Потребности	80	70	100	120	140	510

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	8	4	5	6	2	200
A_2	5	4	3	2	1	200
A_3	3	2	4	3	1	300
Потребности	100	110	150	200	140	700

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3	4	1	2	200
A_2	6	2	1	4	160
A_3	4	3	2	2	160
Потребности	80	180	140	120	520

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	4	4	2	1	500
A_2	6	5	3	4	310
A_3	5	8	2	2	320
Потребности	280	240	250	360	1130

4. ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

КРАТКИЕ ТЕОРИТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метод Гомори для решения задачи целочисленного линейного программирования. Задачей целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП) имеет вид

$$\text{Max}(\text{min})Z == \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i == b_j (j=1, m), \quad (4.2)$$

$$x_i \geq 0 (i=1, n), \quad (4.3)$$

$$x_i - \text{целые числа, } i \in N_1 \quad (4.4)$$

где N_1 – некоторое подмножество индексов $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

Если $N_1 = N$, то задачу (4.1)-(4.4) называют полностью целочисленной, если $N_1 \neq N$, - частично целостной. Метод Гомори является одним из методов решения задач целочисленного линейного программирования. Идея метода Гомори решения задачи (4.1)-(4.4) заключается в следующем. Отбрасывается условие целочисленности (4.4), и полученная ЗЛП (4.1)-(4.3) решается симплекс-методом. Если оптимальное решение задачи (4.1)-(4.3) удовлетворяет ограничению исходной задачи (4.1)-(4.4). Если оптимальное решение задачи (4.1)-(4.3) не удовлетворяет ограничению (4.4), то к основным ограничениям (4.2) добавляется новое линейное ограничение, обладающее следующими свойствами:

1) оптимальный нецелочисленный план задачи (4.1)-(4.3) ему не удовлетворяет;

2) любой целочисленный план задачи (4.1)-(4.3) ему удовлетворяет. Затем решается расширенная задача. Процесс повторяется до получения целочисленного решения. Способы построения дополнительного линейного ограничения различны для полностью и частично целочисленных ЗЛП. В систему свойств 1 и 2 дополнительное ограничение еще называют отсечением Гомори, а метод Гомори-методом отсечения.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 4.1. Малое предприятие производит две модели А и В сборных книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья (высококачественных досок) и временным машинной обработки. Для каждого изделия модели А требуется 2 м² досок, а для изделия В – 5 м². Малое предприятие может получить от своих поставщиков до 1600 м² досок в неделю. Для изготовления каждого изделия модели А требуется 10 мин машинной обработки, а модели В – 12 мин. Время машинной обработки в неделю 100ч. Сколько изделий каждой модели следует выпускать малому предприятию в неделю для получения максимальной прибыли, если каждое изделие модели А приносит 20 ден.ед. прибыли, а каждое изделие модели В – 40 ден.ед.?

Решение. Математическая модель задачи имеет вид

$$\text{Max } Z=f(x)=20 \quad X_1+40X_2 \quad (4.8)$$

$$2X_1+5X_2 \leq 1600, \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{6} X_1 + \frac{1}{5} X_2 \leq 100, \quad (4.10)$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \quad (4.11)$$

$$X_1, X_2 - \text{целые.} \quad (4.12)$$

Преобразуем задачу (4.8)-(4.12), умножив обе части неравенства (4.10) на 30. Получим задачу

$$\text{Max } Z=f(x)=20 \quad X_1+40X_2 \quad (4.8')$$

$$2X_1+5X_2 \leq 1600, \quad (4.9')$$

$$5X_1+6X_2 \leq 3000 \quad (4.10')$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \quad (4.11')$$

$$X_1, X_2 - \text{целые.} \quad (4.12')$$

По методу Гомори для определения оптимального плана задачи (4.8')-(4.12') решаем ЗЛП (4.8') -(4.11') симплекс-методом.

Приведем ее к каноническому виду:

$$\text{Max } Z=f(x)=20 \quad X_1+40X_2 \quad (4.8')$$

$$2X_1+5X_2+X_3 = 1600, \quad (4.9')$$

$$5X_1+6X_2+X_4 = 3000 \quad (4.10')$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \quad (4.11')$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0 - \text{целые.} \quad (4.12')$$

В процессе решения задачи (4.13)-(4.16) получаются симплексные таблицы (4.3)-(4.6)

Таблица 4.3

БП	C _Б	A ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
			20	40	0	0
X ₃	0	1600	2	5	1	0
X ₄	0	3000	5	6	0	1
Z _i -C _i		0	-20	-40	0	0

Таблица 4.4

БП	C _Б	A ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
			20	40	0	0
X ₂	40	320	2/5	1	1/5	0
X ₄	0	1080	13/5	0	-6/5	1
Z _i -C _i		12800	-20/5	0	40/5	0

Табл. 4.5-оптимальная симплексная таблица, $x^0 = (x_1^0; x_2^0)$, $x_1^0 = 415\frac{5}{13}$, $x_2^0 = 153\frac{11}{13}$, -оптимальный план задачи (4.8`)-(4.11`) нецелочисленные, он не является оптимальным планом задачи (4.8`)-(4.12`).

Следуя методу Гомори, находим

$$\max\{\{x_1^0\}, \{x_2^0\}\} = \max\{\{415\frac{5}{13}\}, \{153\frac{11}{13}\}\} = \frac{11}{13} = \{x_2^0\}.$$

БП	C _Б	A ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
			20	40	0	0
X ₃	40	$153\frac{11}{13}$	0	1	$\frac{5}{13}$	$-\frac{2}{13}$
X ₄	20	$415\frac{5}{13}$	1	0	$-\frac{6}{13}$	$\frac{5}{13}$
Z _i -C _i		$14461\frac{7}{13}$	0	0	$\frac{80}{13}$	$\frac{20}{13}$

По первой строке табл. 4.5 строим дополнительное линейное ограничение:

$$\{\frac{5}{13}\}X_3 + \{-\frac{2}{13}\}X_4 \geq \frac{11}{13}. \quad (4.17)$$

Так как

$$\{-\frac{5}{13}\}=\frac{5}{13}, \{-\frac{2}{13}\}=-\frac{2}{13}-[-\frac{2}{13}]=-\frac{2}{13}-(-1)=\frac{11}{13},$$

Ограничение (4.17) примет вид

$$\frac{5}{13}X_3 + \frac{11}{13}X_4 \geq \frac{11}{13} \quad (4.18)$$

Введем в ограничение (4.19') к табл. 4.5, получим табл. 4.6.

Следуя методу Гомори, выполним симплексные преобразования табл. 4.6 с разрешающим элементом $-11/13$. Получим табл. 4.7.

Имеет оптимальный целочисленный план расширенной задачи. Тогда оптимальный план исходной задачи (4.8)-(4.12) $x^0=(415; 154)$.

Таблица 4.6

БП	СБ	А0	X1	X2	X3	X4	X5
			20	40	0	0	0
X2	40	153 $\frac{11}{13}$	0	1	$\frac{5}{13}$	$-\frac{2}{13}$	0
X1	20	415 $\frac{5}{13}$	1	0	$-\frac{6}{13}$	$\frac{5}{13}$	0
X5	0	$-\frac{11}{13}$	0	0	$-\frac{5}{13}$	$-\frac{11}{13}$	1
Zi-Ci		14461 $\frac{7}{13}$	0	0	$\frac{80}{13}$	$\frac{20}{13}$	0

Таблица 4.7

БП	СБ	А0	X1	X2	X3	X4	X5
			20	40	0	0	0
X2	40	153					
X1	20	415					
X4	0	1					
Zi-Ci		14460	0	0	$\frac{60}{11}$	0	$\frac{20}{11}$

ЗАДАНИЯ.

Решить методом Гомори.

4.1 $\max Z=3X_1 + X_2;$
 $4X_1 + 11X_2 \leq 11,$
 $X_1 \leq 5,$
 $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0,$
 X_1, X_2 – целые.

4.2 $\max Z=X_1+X_2;$
 $8X_1-3X_2 \leq 24,$
 $3X_1+2X_2 \leq 13,$
 $X_1 \geq 0, X \geq 0,$
 X_1, X_2 – целые.

$$\begin{aligned}
4.3 \max \quad & Z=2X_1-8X_2; \\
& 3X_1+5X_2 \leq 17, \\
& X_2 \leq 4, \\
& X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \\
& X_1, X_2 - \text{целые}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.4 \max \quad & Z=7X_1-9X_2; \\
& 2X_1+X_2 \leq 9, \\
& 3X_2 \leq 7, \\
& 4X_1 + 5X_2 \leq 5, \\
& X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \\
& X_1, X_2 - \text{целые}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.5 \max \quad & Z=X_1-7X_2; \\
& 3X_1+X_2 \leq 8, \\
& X_1-3X_2 \geq 2, \\
& X_1 \leq 4, \\
& X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \\
& X_1, X_2 - \text{целые}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.6 \max \quad & Z=X_1 - 7X_2; \\
& 7X_1 - X_2 \leq 5, \\
& 2X_1+3X_2 \leq 11, \\
& X_2 \geq 5, \\
& X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \\
& X_1, X_2 - \text{целые}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.7 \max \quad & Z=X_1+5X_2; \\
& X_1+ X_2 \leq 7, \\
& 3X_1+2X_2 \leq 5, \\
& X_1 \geq 6, \\
& X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \\
& X_1, X_2 - \text{целые}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.8 \max \quad & Z=X_1+2X_2; \\
& X_1+ X_2 \leq 5, \\
& -X_1+2X_2 \leq 3, \\
& X_2 \leq 6 \\
& X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \\
& X_1, X_2 - \text{целые}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.9 \max \quad & Z=2X_1+5X_2; \\
& 3X_1+4X_2 \leq 25, \\
& 2X_1 - X_2 \geq 1, \\
& X_1 \leq 5, \\
& X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \\
& X_1, X_2 - \text{целые}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.10 \max \quad & Z=2X_1+3X_2; \\
& 2X_1+2X_2 \geq 1, \\
& 4X_1+ X_2 \leq 15, \\
& X_1+3X_2 \leq 16, \\
& X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \\
& X_1, X_2 - \text{целые}
\end{aligned}$$

5. ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

5.1 СОСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

КРАТКИЕ ТЕОРИТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Общая задача нелинейного программирования ставится следующим образом: требуется найти значения n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые удовлетворяют m уравнениям и неравенствам

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (5.1.)$$

и максимизируют (минимизируют) функцию

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.2.)$$

Предполагается, что вид функций f_j известен, а b_j - заданные постоянные. Величины m и n между собой не связаны, так что m может быть больше, меньше или равно n . В каждом из ограничений (5.1) сохраняется только один из знаков: $\leq$, $=$ или $\geq$. Обычно некоторые или все переменные удовлетворяют условию неотрицательности.

В отличие от линейных задач в нелинейных допустимая область может быть с бесконечным множеством крайних точек, целевая функция может достигать экстремума не только на границе, но и внутри области и, более того, иметь несколько локальных экстремумов.

Этими причинами объясняется отсутствие общих методов, подобных симплекс-методу в линейном программировании, позволяющих решать любые задачи нелинейного программирования.

Вместе с тем отдельные специальные типы нелинейных задач достаточно хорошо изучены. Это относится и к задачам с выпуклыми (вогнутыми) целевыми функциями, рассматриваемыми на выпуклых множествах.

В теории выпуклого программирования в качестве основной обычно рассматривается задача минимизации выпуклой функции n переменных $z=f(x)$ при ограничениях $\varphi_i(x) \leq 0$ ($i = \overline{1, m}$), $x \geq 0$, где функции $\varphi_i(x)$ предполагаются выпуклыми.

Выпуклость множества допустимых решений обуславливается выпуклостью функций $\varphi_i(x)$. Если $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ - вогнутые функции, то имеем задачу максимизации $f(x)$ при ограничениях $\varphi_i(x) \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$), $x \geq 0$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 5.1. Предприятие может выпускать два вида изделий. На их изготовление идет три типа ресурсов.

Запасы ресурсов на предприятии, плановые нормы их расхода a_{ij} ($i=\overline{1,3}$; $j=\overline{1,2}$), плановая себестоимость c_i и оптовые цены указаны в табл. 5.1 (все данные в расчете на 1 тыс. шт. изделий).

Из-за брака в процессе производства расход ресурсов зависит от объема x_i производства изделий и в первом приближении выражается линейной функцией $a_{ij} + x_i$, а себестоимость продукции - функцией $c_i + 0.1x_i$ изделия могут выпускаться в любых соотношениях, так как, сбыт, обеспечен. Составить план выпуска изделий, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Таблица 5. 1

Тип ресурса	Запас ресурса	Нормы расхода на одно изделие вида	
		А	Б
<i>I</i>	100	10	20
<i>II</i>	120	20	10
<i>III</i>	150	20	20
Себестоимость		5	10
Цена		7	13

Решение. На изготовление планируемых к выпуску x_1 и x_2 единиц изделий А и Б (за единицу изделия примем 1 тыс. шт.) будет израсходовано $(10+x_1)x_1 + (20+x_2)x_2$ единиц ресурса I; $(10+x_1)$ и $(20+x_2)$ - расход ресурса I на единицу изделия соответственно А и Б. По условию $(10+x_1)x_1 + (20+x_2)x_2 \leq 100$ или

$$10x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2 \leq 100. \quad (5.3.)$$

Аналогично получаем ограничения по ресурсам II и III:

$$20x_1 + x_1^2 + 10x_2 + x_2^2 \leq 120; \quad (5.4)$$

$$20x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2 \leq 150. \quad (5.5)$$

В результате реализации единицы изделия А предприятие получит прибыль 7 - $(5+0,1x_1)$ ден. ед., единицы изделия Б - прибыль 13- $(10+0,1x_2)$ ден. ед. Общая прибыль предприятия $z = (7 - (5+0,1x_1))x_1 + (13 - (10 + 0,1x_2))x_2$ или

$$z = 2x_1 + 3x_2 - 0,1x_1^2 - 0,1x_2^2. \quad (5.6.)$$

Итак, задача свелась к нахождению неотрицательных x_1^* и x_2^* , удовлетворяющих нелинейным ограничениям (5.3) - (5.5) и доставляющих максимум нелинейной функции (5.6).

В целевой функции и ограничениях переменные содержатся в степенях выше первой. Это характерный признак задачи нелинейного программирования. Можно показать, что и целевая функция, и ограничительные функции в задаче (5.3) - (5.6) являются вогнутыми, а потому задача относится к выпуклому программированию.

ЗАДАНИЯ

5.1. Составить экономико-математическую модель задачи и на ее основе определить место строительства завода между двумя пунктами сбыта, расстояние между которыми 100 км, и размер поставок в каждый из пунктов, если валовой выпуск продукции завода составляет 150 ед. Зависимости продажной цены x_i ($i = 1, 2$) единицы продукции в каждом из пунктов сбыта и затрат на перевозки

единицы продукции от расстояния U_i между заводом и пунктом сбыта задаются табл. 5.2.

Т а б л и ц а 5. 2

Пункт сбыта	Продажная цена	Затраты на перевозки
1	$15 - 0.1x_1$	$1.5 + 0.1y_1$
2	$12 - 0.08x_2$	$1.5 + 0.05y_2$

5.2. Составить экономико-математическую модель задачи и найти оптимальный план выпуска продукции двух видов с учетом ограниченных ресурсов сырья (120 кг), электроэнергии (280 кВт·ч) и оборудования (300 станко-часов) при следующих нормах расхода на единицу продукции: сырья 3 и 2 кг/ед., электроэнергии 4 и 7 кВт·ч и оборудования $50-5x_1$ и $20-4x_2$ где x_1 и x_2 - искомое число производимых единиц продукции 1-го и 2-го вида соответственно.

5.2. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

КРАТКИЕ ТЕОРИТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

С геометрической точки зрения задача выпуклого программирования сводится к нахождению выпуклой области, определяемой системой ограничений задачи, точки, через которую проходит линия уровня поверхности, задаваемой целевой функцией $z = f(x)$, соответствующая наименьшему (наибольшему) значению параметра z . В частности, если целевой является нелинейная выпуклая (вогнутая) функция, а ограничительные функции линейны, то областью допустимых решений будет, вообще говоря, либо выпуклый многогранник, либо выпуклая неограниченная многогранная область. При этом целевая функция свой конечный экстремум, даже если он единственный, может принимать как на границе, так и внутри многогранника допустимых решений.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 5.2. Найти экстремальные значения функции $z = x_1 + 3x_2$ в области неотрицательных решений системы неравенств

$$\left. \begin{array}{l} 9 \leq x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 6x_2 + 34 \leq 36 \\ x_1 + x_2 \geq 8 \end{array} \right\}$$

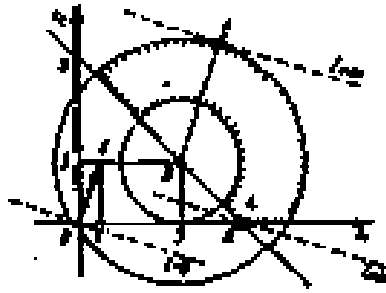


Рис. 5.1

Решение. Целевая функция z определяет в трехмерном пространстве плоскость. Ее можно задать на координатной плоскости x_1Ox_2 проекциями линий уровня $z=\text{const}$. Это будет семейство параллельных прямых, перпендикулярных к вектору $c = (1; 3)$ (рис. 5.1). Прежде чем изобразить на плоскости x_1Ox_2 множество допустимых решений (x_1, x_2) задачи, преобразуем двойное неравенство, выделив полные квадраты относительно переменных x_1 и x_2 :

$$9 \leq (x - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 36.$$

Теперь видно, что допустимая область (на рис. 5.1 она заштрихована) ограничена двумя окружностями, заданными уравнениями $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 = 36$ и $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 = 9$ с общим центром $D(5; 3)$ и радиусами, равными соответственно 6 и 3, прямой $x_1 + x_2 = 8$ и осями $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

С учетом вектора c , являющегося градиентом целевой функции z , на рис. 5.1 разрешающими линиями уровня $z_{\min}$ и $z_{\max}$ засечены точки A и E , в которых функция z достигает соответственно минимума и максимума в допустимой области. Координаты точки A находятся непосредственно по рисунку: $A(8; 0)$. Для определения координат точки E , в которой разрешающая линия уровня $z_{\max}$ касается граничной окружности, решаем совместно уравнения этой окружности и прямой DE , перпендикулярной к касательной $z_{\max}$, т. е. уравнения $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 = 36$ и $x_1 - 5 = (x_2 - 3)/3$.

Учитывая неотрицательность x_1 и x_2 , находим

$$x_1 = 5 + 6\sqrt{0,1}, \quad x_2 = 3 + 18\sqrt{0,1}.$$

Итак, $z_{\min} = 8$ и достигается в точке $(8; 0)$; $z_{\max} = 14 + 6\sqrt{10}$ и достигается в точке $(5 + 6\sqrt{0,1}; 3 + 18\sqrt{0,1})$.

Пример 5.3. Предприятие выпускает изделия A и B , при изготовлении которых используется сырье C_1 и C_2 . Известны запасы b_i ($i = 1, 2$) сырья, нормы a_{ij} ($j = 1, 2$) его расхода на единицу изделия, оптовые цены p_j на изделия и их плановая себестоимость c_j^0 . Как только объем выпускаемой продукции перестает соответствовать оптимальному размеру предприятия, дальнейшее увеличение выпуска x_j ведет к повышению себестоимости продукции и в первом приближении фактическая себестоимость c_j описывается функцией $c_j = c_j^0 + c'_j x_j$ где c'_j - некоторая постоянная. Все числовые данные приведены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

b_1	b_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	p_1	p_2	c_1^0	c_2^0	c_1'	c_2'
90	88	13	6	8	11	12	10	7	8	0.2	0.2

Составить экономико-математическую модель задачи и на ее основе найти план выпуска изделий, обеспечивающий предприятию наивысшую прибыль в условиях нарушения баланса между объемом выпуска и оптимальным размером предприятия.

Решение. Обозначая через z сумму прибыли, получаемой предприятием после реализации x_1 выпущенных изделий А и x_2 изделий Б, приходим к следующей модели задачи: максимизировать функцию .

$$z = (p_1 - (c_1^0 + c_1'x))x_1 + (p_2 - (c_2^0 + c_2'x))x_2 \quad (5.7)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (5.9)$$

Подставляя в модель (5.7) - (5.9) числовые данные из табл. 5.3 и упрощая целевую функцию, получаем

$$\max z = 5x_1 - 0.2x_1^2 + 2x_2 - 0.2x_2^2 \quad (5.10)$$

$$\left. \begin{aligned} 13x_1 + 6x_2 &\leq 90, \\ 8x_1 + 11x_2 &\leq 88, \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (5.12)$$

Функция (5.10) определяет в трехмерном пространстве параболоид вращения (нисходящий). Линиями пересечения этой поверхности с плоскостями, параллельными координатной плоскости x_1Ox_2 (линиями уровня), будут окружности с центрами на оси поверхности, которая параллельна оси Oz . Поверхность (5.10) на плоскости x_1Ox_2 изобразится семейством концентрических окружностей с общим центром D (точка D является проекцией на плоскости x_1Ox_2 оси поверхности) (рис. 5.2). Для построения концентрических окружностей уравнение (5.10) приведено к виду $(x_1 - 12,5)^2 + (x_2 - 5) = \sqrt{181,25 - 5z}$. При $z = 10, 15, 20, 25, 30, 35$ их радиусы $r = \sqrt{181,25 - 5z}$ равны соответственно 11,46; 10,31; 9,01; 7,50; 5,59; 2,50, а общий центр D имеет координаты (12,5; 5).

Допустимой областью переменных x_1 и x_2 , определяемой неравенствами (5.12), (5.13), будет многоугольник OABC.

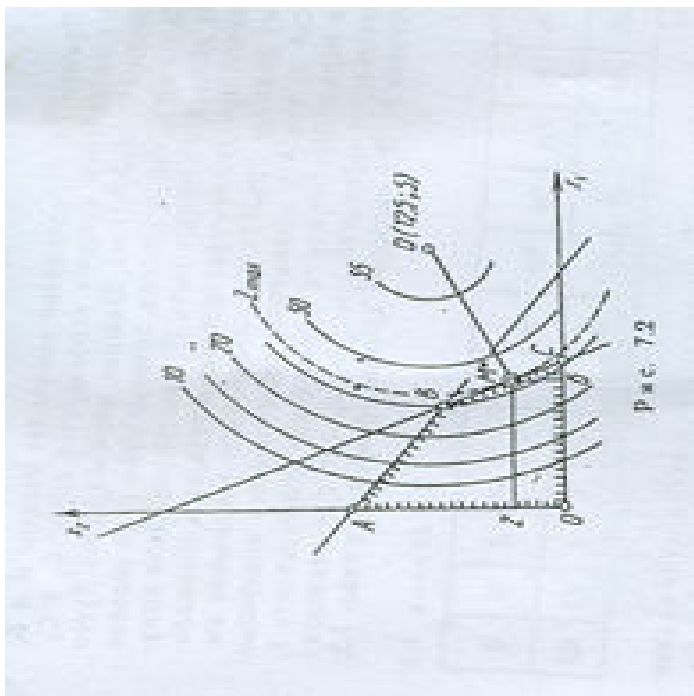


Рис. 5.2

Как видно из рис. 5.2, координаты x_1^* и x_2^* точки, через которую на поверхности параболоида проходит линия уровня, отвечающая максимальному значению функции z (на рисунке проекцией этой линии является окружность радиусом $\sqrt{181,25 - 5z_{\max}}$, она изображена штриховой линией), можно найти, решая совместно уравнение $13x_1 + 6x_2 = 90$ граничной прямой BC и уравнение $x_2 - 5 = 6/13 (x_1 - 12,5)$ прямой DM^* , проходящей через точку D перпендикулярно к граничной прямой BC . При этом $z_{\max} = 26$. В данном случае точка оптимума оказалась на границе допустимой области.

Итак, для получения предприятием максимальной прибыли, составляющей 26 ден. ед., следует выпустить 6 изделий A и 2 изделия B .

ЗАДАНИЯ

5.1 Найти максимальную функцию $z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$ при ограничениях $x_1^2 + x_2^2 \leq 36$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

5.2 Найти максимум функции $z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2$ при ограничениях $2x_1 + 5x_2 \leq 30$, $2x_1 + x_2 \leq 14$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

5.3 Найти максимум функции $z = x_1^2 + x_2^2$ при ограничениях $(x_1 - x_2)^2 \geq 9$, $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 36$, $x_1 + x_2 \geq 8$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

5.4 Максимизировать функцию $z = 2x_1 - 0,2x_1^2 + 3x_2 - 0,2x_2^2$ при ограничениях $2x_1 + 3x_2 \leq 13$, $2x_1 + x_2 \leq 10$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

5.5 Минимизировать функцию $z = -2x_1 + 0,1x_1^2 - 3x_2 + 0,1x_2^2$ при ограничениях

$5x_1 + 13x_2 \leq 51$, $15x_1 + 7x_2 \leq 105$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

6. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

КРАТКИЕ ТЕОРИТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Динамическое программирование (динамическое планирование) представляет собой математический аппарат, позволяющий осуществлять оптимальное планирование управляемых процессов, т.е. процессов, на ход которых можно целенаправленно влиять. Это метод оптимизации, специально приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решений может быть разбит на отдельные шаги. Такие операции называют *многошаговыми*.

В общей постановке задача динамического программирования формулируется следующим образом. Имеется некоторая управляемая физическая система S , характеризующаяся определенным набором параметров. В этой системе происходят какие-то процессы (экономические, производственные, технологические и т.п.), которые можно представить как многошаговые. На каждом шаге процессам в системе соответствуют определенные значения параметров, описывающих *состояние системы*. Заданы условия, позволяющие определять или начальное, или конечное состояние системы, или оба этих состояния. Иногда задаются области начальных и конечных состояний. Поскольку управление системой осуществляется для достижения конкретной цели, то указан *показатель эффективности* управления, называемый *целевой функцией*, численно выражающий эффект («выигрыш»), получаемый при том или ином управлении из множества допустимых управлений. В экономических системах целевая функция может определять прибыль, затраты, рентабельность, объем производства и т.п. Задача динамического программирования состоит в выборе из множества допустимых управлений такого, которое переводит систему из начального состояния в конечное, обеспечивая при этом целевой функции экстремум (минимум или максимум в зависимости от ее экономической сути). Упомянутое управление называют *оптимальным*.

В основе вычислительных алгоритмов динамического программирования лежит следующий **принцип оптимальности**, сформулированный Р. Беллманом: каково бы ни было состояние системы S в результате $i-1$ шагов, управление на i -шаге должно выбираться так, чтобы оно в совокупности с управлениями на всех последующих шагах с $(i + 1)$ -го до N -го включительно доставляло экстремум целевой функции.

Введем следующие обозначения: x_{i-1} – множеством состояний, в которых система S может находиться перед i -шагом; элементы этого множества находятся из условий конкретной задачи. При $i = 1$ получается множество x_0 начальных состояний, которое может состоять из одного или нескольких элементов; то же самое можно сказать и о множестве x_n конечных состояний; x_i – множество состояний в конце i -го шага; u_i – множество управлений, которые могут быть выбраны на i -шаге и под воздействием каждого из которых система S переходит в одно из состояний множества x_i . Элементы множества u_i определяются условиями конкретной задачи: $F_i(x_{i-1}, u_i)$ – условно-оптимальное значе-

ние целевой функции на интервале от $(i+1)$ -го до N -го шага включительно при условии, что в результате воздействия управления, выбранного из множества U_i , система S на i -м шаге перейдет к концу шага из состояния, принадлежащего множеству x_{i-1} , в состояние из множества x_i .

В принятых обозначениях принцип оптимальности Беллмана можно записать в математической форме следующим образом:

$$F_i(x_{i-1}, u_i) = \text{extr}_{u_i}(z_i(x_{i-1}, U_i) + F_{i+1}(x_i)). \quad (6.1)$$

Для последнего (N -го) шага уравнение (6.1) принимает вид

$$F_N(x_{N-1}, U_N) = \text{extr}_{U_N}(z_N(x_{N-1}, U_N) + F_{N+1}(x_N)).$$

Поскольку функция $F_{i+1}(x_i)$ определена только для $i = 1, N-1$, второе слагаемое в правой части можно положить равным нулю. В результате приходим к уравнению

$$F_N(x_{N-1}, U_N) = \text{extr}_{U_N} z_N(x_{N-1}, U_N) \quad (6.2)$$

Если рассматривается система без последствия, то ее состояние в конце i -го шага будет отвечать одному из элементов множества x_i и зависит как от состояния системы S на начало шага, которое характеризовалось соответствующим элементом множества x_{i-1} , так и от управления, выбранного из множества U_i . Эту зависимость символически можно записать в следующей форме:

$$x_i = f(x_{i-1}, U_i). \quad (6.3)$$

На основании уравнений (6.1)-(6.3) и с учетом множеств x_{i-1} , x_i и U_i строится вычислительная процедура метода динамического программирования, распадающаяся на два этапа: условную и безусловную оптимизацию.

Условная оптимизация осуществляется путем «попятного» движения от последнего шага к первому. С помощью уравнения (6.2) для каждого состояния из множества x_{N-1} находится такое управление из множества U_N , при котором функция $F_N(x_{N-1}, U_N)$ достигает экстремума и система S переходит в заданное конечное состояние. Таким образом, для каждого состояния из множества x_{N-1} находится условно-оптимальное значение целевой функции (условно-оптимальный выигрыш) и соответствующее условно-оптимальное управление. Далее на основании уравнения (6.1) и множества состояний системы S перед $(N-1)$ -м шагом определяются условно-оптимальные управления на $(N-1)$ -м шаге и условно-оптимальные значения целевой функции на двух последних шагах: $(N-1)$ -м и N -м. При этом для каждого состояния и управления соответственно из множеств x_{N-2} и U_{N-1} на основе равенства (6.3) находится отвечающее им состояние из множества x_{N-1} системы S перед N -м шагом и поэтому состоянию с учетом результатов предшествующих расчетов определяется условно-оптимальное значение $F_N(x_{N-1})$ целевой функции. Описанный процесс вычислений продолжается до достижения первого шага. В результате получается последовательность множеств условно-оптимальных управлений системы S , ко-

торая в конкретных задачах может быть представлена последовательностью таблиц или набором файлов в памяти ЭВМ.

Для определения безусловно-оптимального управления системой S при заданном ее начальном состоянии x_0 анализируем выполненные расчеты, перемещаясь по оптимизируемому N - шаговому процессу в прямом направлении: от первого шага к последнему. Эта часть рассуждений называется *безусловной оптимизацией*. Для начального состояния x_0 находим в множестве U_i условно-оптимальных управлений для первого шага с учетом условно-оптимального значения целевой функции на этом шаге безусловно-оптимальное управление U_i^* и состояние в множестве x_i системы перед вторым шагом. С этими данными входит во второе множество U_2 управлений для второго шага и определяем U_2^* и т. д.

Безусловно-оптимальное значение целевой функции для всего N -шагового процесса $z_{extr} = F_1(X_0, U_1^*)$.

Искомое оптимальное управление можно записать в виде вектора

$$U^* = (U_1^*; U_2^*; \dots; U_{n-1}^*; U_N^*).$$

Описанная вычислительная процедура метода динамического программирования станет понятной, когда читатель разберет конкретный числовой пример с производственным содержанием, приведенный ниже.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 6.1. На данной сети дорог (рис. 6.1.) указаны стоимости доставки груза из пункта в пункт. Найти наиболее экономный маршрут перевозки груза из пункта 1 в пункт 10.

Решение . Согласимся, что минимизировать затраты по доставке целесообразно применительно к единице груза, ибо понятно, что если затраты минимальны при перевозке единицы груза, то они будут минимальными и при перевозке любого количества груза.

Концепция динамического программирования предполагает, что процессу принятия решения в оптимизационной задаче может быть придан шаговый характер. С этой целью разобьем все пункты сети на группы (табл. 6.1.). К группе I отнесем пункт 1, к группе II – пункты, в которые можно попасть непосредственно из пункта I (такowymi будут 2 и 3), к группе III отнесем пункты, в которые можно попасть непосредственно из любого пункта группы II (такowymi будут 4, 5 и 6) и т. д. В результате движение транспорта с грузом пункта 1 в пункт 10 можно рассматривать как четырехшаговый процесс: на первом шаге транспорт перемещается из пункта 1 в какой-то пункт группы II, на втором шаге – из пункта группы II в пункт группы III и т. д.

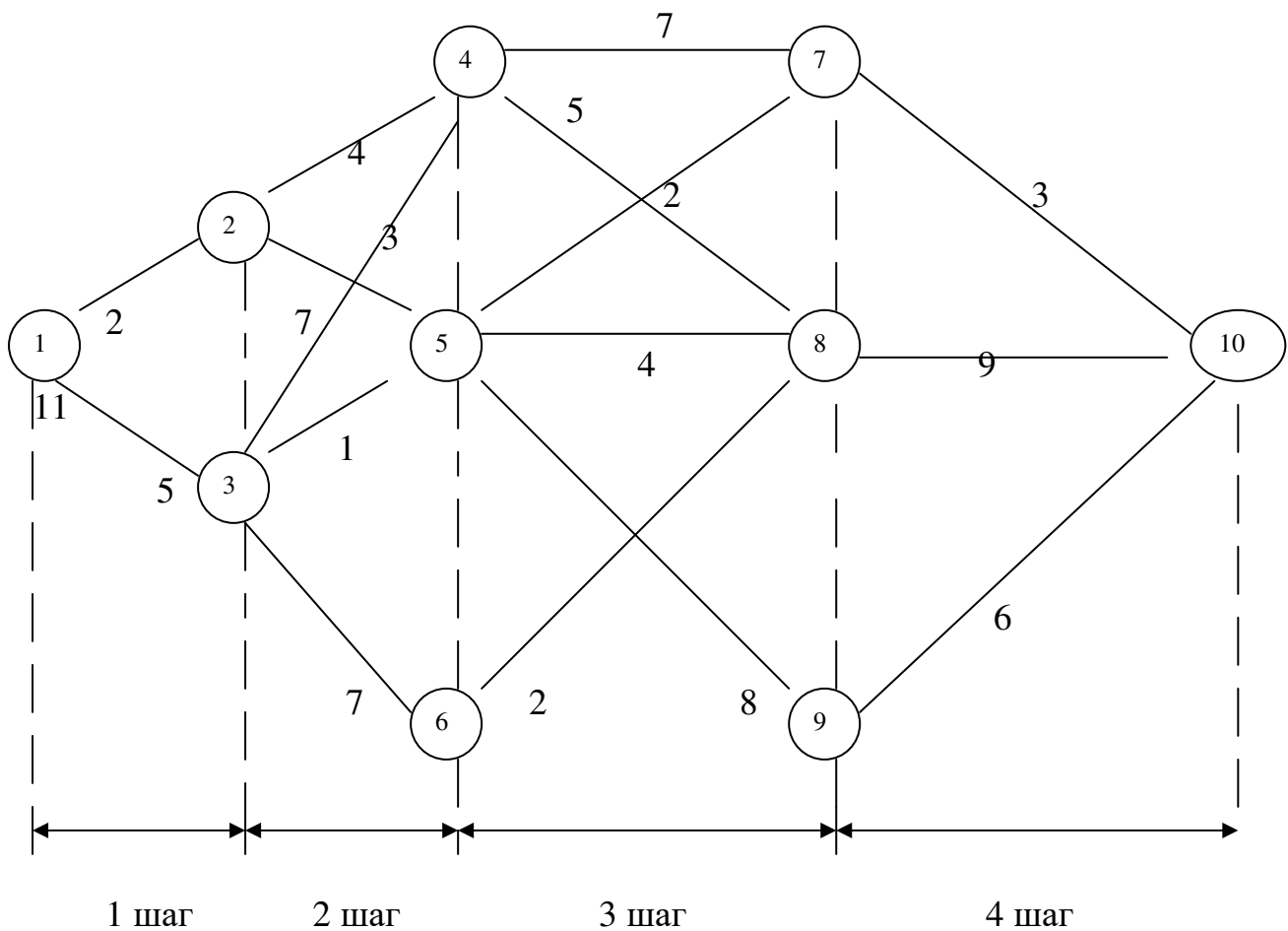


Таблица 6.1.

I	II	III	IV	V
1	2 3	4 5 6	7 8 9	10

После разбиения пунктов сети на группы формирование наиболее экономного маршрута может быть реализовано за четыре шага.

В рассматриваемой задаче в качестве физической системы выступает транспорт с грузом, перемещающийся из начального состояния s_1 (из пункта 1) в конечное состояния s_{10} (пункт 10), и сеть дорог. За состояние s_i системы перед i -м шагом естественно принять местонахождение транспорта с грузом в пункте, в котором он пребывает перед этим шагом. Управление u_i на i -м шаге состоит в выборе дороги (i, j) , по которой следует направлять груз из данного пункта в соседний в общем направлении на пункт 10. Состояние в конце шага определяется номером пункта, в который будет доставлен груз в результате сделанного выбора (принятого управления), а значение z_i целевой функции на i -м шаге –

это затраты на перевозку единицы груза из данного пункта в выбранный соседний пункт.

В соответствии с вычислительной схемой метода динамического программирования фактическое формирование искомого оптимального управления данным процессом состоит из двух процедур: условной оптимизации и безусловной оптимизации. Условная оптимизация осуществляется в результате «пятного» движения от последнего шага исследуемого явления к его первому шагу, в процессе этого движения находятся шаговые условно-оптимальные управления. Безусловная оптимизация осуществляется в процессе движения в прямом направлении от первого шага к последнему, при этом из найденных ранее шаговых условно-оптимальных управлений формируется безусловное оптимальное управление всем данным процессом.

Условную оптимизацию начнем с анализа четвертого шага. Возможные состояния, в которых транспорт с грузом может оказаться перед четвертым шагом, зависят от управлений на предшествующих шагах и соответствуют его месту нахождению либо в пункте 7, либо в пункте 8, либо в пункте 9. Обозначим эти состояния соответственно s_7 , s_8 , s_9 . Они образуют множество возможных состояний на начало четвертого шага. Это будет множество x_3 . Из каждого указанного состояния можно перейти в конечное состояние s_{10} единственным путем: из пункта 7 в пункт 10 груз может быть доставлен только дорогой 1 (7, 10), из 8 в 10 – дорогой (8,10), из 9 в 10 – дорогой (9, 10). Решения о доставке груза по названным дорогам и являются управлениями на четвертом шаге, соответствующими указанным состояниям. Итак, множество u_4 управлений на четвертом шаге состоит из элементов: (7, 10), (8, 10) и (9, 10).

Условно-оптимальные затраты на этом шаге в общем случае выражаются основным функциональным уравнением, записанным для четвертого шага, если в равенстве (6.2) положить $N=4$:

$$F_4(x_3, u_4) = \min_{u_4} z_4(x_3, u_4)$$

В данном случае для каждого состояния целевая функция z_4 является однозначной (каждому состоянию соответствует единственное управление), поэтому

$$\min_{u_4} z_4(x_3, u_4) = z_4(x_3, u_4) \text{ т.е. } F_4(x_3, u_4) = z_4(x_3, u_4)$$

Как видно из рис. 6.1, функция $F_4(x_3, u_4)$ в зависимости от состояний и управлений (от x_3 и u_4) принимает значения 3, 9 и 6, а управления (7, 10), (8, 10), (9, 10) будут условно-оптимальными соответственно для состояний s_7 , s_8 , s_9 . Этим завершается первый этап условной оптимизации.

Для большей наглядности результаты проведенных рассуждений оформим в виде табл. 6.2.

Таблица 6.2.

x_3	u_4	x_4	F_4
C_7	(7, 10)	C_{10}	3
C_8	(8, 10)	C_{10}	9
C_9	(9, 10)	C_{10}	6

Переходя ко второму этапу условной оптимизации – анализу третьего шага, запишем функциональное уравнение для этого шага, которое получится из равенства (6.1) при $i = 3$:

$$F(x_2, u_3) = \min_{u_3} (z_3(x_2, u_3) + F_4(x_3))$$

Из рисунка 6.1. видно, что множеству x_2 возможных состояний перед третьим шагом соответствует место положение транспорта с грузом либо в пункте 4 (состояние s_4), либо в пункте 5 (состояние s_5), либо в пункте 6 (состояние s_6), т. е. множество x_2 состоит из трех элементов: s_4, s_5, s_6 . Множеству u_3 возможных управлений на третьем шаге соответствует выбор одной из дорог, ведущих из пунктов 4, 5 и 6 в пункты 7, 8, 9: для пункта 4 это либо (4, 7), либо (4, 8); для пункта 5- либо (5, 8), либо (5, 9); для пункта 6- (6, 8). Таким образом, множество u_3 управлений на третьем шаге состоит из шести элементов: (4, 7), (4, 8), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (6, 8). Множество значений целевой функции $z_3(x_2, u_3)$ – непосредственных затрат на перевозки единицы груза из пунктов 4, 5 и 6 в соседние пункты 7, 8, 9 – состоит: из элементов (см. рис. 6.1) 7 и 5 для состояния s_4 ; из элементов 2, 4, 8 для состояния s_5 ; из элемента 2 для состояния s_6 .

Как же найти условно-оптимальное управление на третьем шаге для каждого из возможных состояний, гарантирующее минимальные транспортные затраты?

Рассмотрим состояние s_4 . В отличие от четвертого шага, где для каждого состояния s_7, s_8 , и s_9 существовала только одна дорога (одно управление), ведущая в пункт 10, а потому выбора не было, здесь две дороги (два управления) ведут в направлении пункта 10: (4, 7) и (4, 8). Следовательно, в данном случае предстоит выбор наиболее экономного пути в пункт 10. Этот выбор мы сделаем с помощью уравнения (6.4), найдя при этом и минимальные затраты. Используя данные, приведенные на рис. 6.1, и результаты условной оптимизации четвертого шага (см. табл. 6.2), получаем.

$$F_3(x_2, u_3) = \min_{(4, 7), (4, 8)} (7+3; 5+9) = 10$$

Из этого равенства видно, что минимальные затраты в 10 ден. ед. соответствуют выбору дороги (4, 7). Итак, для состояния s_4 условно-оптимальным управлением будет выбор дороги (4, 7), при этом условно-оптимальные транс-

портные затраты на участке от пункта 4 до конечного пункта 10 составят 10 ден. ед.

Аналогичным образом для состояния c_5 находим

$$F_3(x_2, u_3) = \min (2+3; 4+9; 8+6) = 5$$

(5, 7), (5, 8), (5, 9)

Откуда следует, что условно-оптимальным управлением будет выбор дороги (5, 7), обеспечивающий условно-оптимальные затраты в 5 ден. ед. Для состояния c_6 получаем условно-оптимальные затраты

$$F_3(x_2, u_3) = \min (2+9) = 11,$$

(6, 8)

которые соответствуют условно-оптимальному управлению (6, 8) (выбору дороги (6, 8)).

В компактном виде приведенные выкладки записаны в форме табл. 6.3. Этим завершается второй этап условной оптимизации.

Третий этап условной оптимизации – анализ второго шага – осуществляется совершенно аналогично второму этапу. Функциональное уравнение для второго шага запишется в следующей форме:

$$F_2(x_1, u_2) = \min_{u_2} (z_2(x_1, u_2) + F_3(x_2))$$

Таблица 6.3

x_2	u_3	x_3	z_3	F_4	$x_3 + F_4$	F_3
c_4	(4, 7)	c_7	7	3	10	10
	(4, 8)	c_8	5	9	14	-
c_5	<u>(5, 7)</u>	<u>c_7</u>	2	3	5	<u>5</u>
	(5, 8)	c_8	4	9	13	-
	(5, 9)	c_9	8	6	14	-
c_6	(6, 8)	c_8	2	9	11	11

Как видно из рис. 6.1, здесь множество x , состояний образуют элементы c_2 и c_3 , а множество управлений – элементы (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (3, 6). Значения целевой функции $z_2(x_1, u_2)$ заданы на рис. 6.1, а значения $F_3(x_2)$ получены на предыдущем этапе условной оптимизации (табл. 6.3).

Читателю предлагается подробно выполнить соответствующие выкладки, результаты которых приведены в табл. 6.4. Этим завершается третий этап условной оптимизации.

Таблица 6.4

x_1	u_2	x_2	x_2	F_3	$z_2 + F_3$	F_2
c_2	(2, 4)	c_4	4	10	14	-
	(2, 5)	c_5	7	5	12	12
c_3	(3, 4)	c_4	3	10	13	-
	(3, 5)	c_5	1	5	6	<u>6</u>
	(3, 6)	c_6	7	11	18	-

Заключительным этапом процедуры условной оптимизации является анализ первого шага. Особенность этого шага состоит в том, что в его начале состояние c_1 системы определено однозначно: транспорт с грузом находится в пункте 1, так что множество x_0 состояний содержит единственный элемент c_1 , а множество u_1 управлений - два элемента: (1, 2) (1, 3). Функциональное уравнение для этого шага имеет вид

$$F_1(x_0, u_1) = \min_{u_1} (z_1(x_0, u_1) + F_2(x_1))$$

Результаты вычислений приведены в табл. 6.5.

Таблица 6.5

x_0	u_1	x_1	z_1	F_2	$z_1 + F_2$	F_1
c_1	(1, 2)	c_2	2	12	14	-
	(1, 3)	c_3	5	6	11	<u>11</u>

Как видно из табл. 6.5, условно-оптимальным управлением для этого шага является выбор дороги (1, 3), обеспечивающий минимальные суммарные затраты $F_1(x_0, u_1) = F_1(1, (1, 3)) = 11$ на всем пути от пункта 1 до пункта 10. Что же касается структуры этого пути (наиболее экономного маршрута), то она выяснится в процессе процедуры безусловной оптимизации.

При безусловной оптимизации остается пройти еще раз весь оптимизируемый процесс, но уже в прямом направлении, начиная с первого и кончая четвертым шагом, и «прочитать» искомое оптимальное управление (наиболее экономный маршрут), которое будет составлено из найденных ранее (при условии оптимизации) шаговых условно-оптимальных управлений (дорог между отдельными пунктами сети). Из табл. 6.5. видно, что из начального пункта 1 (состояние c_1) груз следует направлять по дороге (1, 3), ибо именно этому условно-оптимальному шаговому управлению соответствуют минимальные затраты (см. последний столбец табл.(6.5)). В результате груз окажется в пункте 3

(состояние s_3). Переходя к табл. 6.4. замечаем, что из пункта 3 груз необходимо доставлять дорогой (3, 5) в пункт 5 (состояние s_5) (см. последний столбец табл. 6.4). Из табл. 6.3 видно, что далее груз должен перевозиться по дороге (5, 7) до пункта 7 (состояние s_7), откуда, как это следует из табл. 6.2, он направляется дорогой (7, 10) в конечный пункт 10 (состояние s_{10}). Таким образом, наиболее экономный маршрут пролегает через пункты 1, 3, 5, 7 и 10, при этом транспортные расходы минимизируются и составляют 11 ден. ед. на единицу груза.

При использовании метода динамического программирования часто получаются побочные результаты, связанные с рассматриваемой задачей и нередко имеющие не менее важное значение, чем основной результат. В данном случае кроме оптимального маршрута доставки груза из пункта 1 в пункт 10, информация, содержащаяся в табл. 6.2-6.5, позволяет находить наиболее экономный маршрут в пункт 10 из любого другого пункта данной сети дорог. Находятся эти маршруты так же, как и сформированный выше маршрут 1-3-5-7-10. Так, например, оптимальный маршрут из пункта 2 в пункт 10 пройдет через пункты 5 и 7.

Заметим в заключение, что в рассматриваемом примере проиллюстрирована одна из главных особенностей метода динамического программирования: при выборе решения на каждом шаге необходимо руководствоваться интересами всего оптимизируемого процесса, а не только интересами данного шага. Именно этим объясняется включение в наиболее экономный маршрут дороги (1, 3), удельные транспортные затраты на которой в 2, 5 раза выше, чем на дороге (1, 2). Эта «жертва» на первом шаге принесена с тем, чтобы минимизировать общие затраты на всем четырехшаговом маршруте.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 1

Темы: «Линейное программирование», «Двойственность в линейном программировании»

На предприятии имеется возможность выпускать n видов продукции P_j ($j=1, 2, \dots, n$). При её изготовлении используются ресурсы P_1, P_2 и P_3 . Размеры допустимых затрат ресурсов ограничены соответственно величинами b_1, b_2 и b_3 . Расход ресурса i -го ($i=1, 2, 3$) вида на единицу продукции j -го вида составляет a_{ij} единиц. Цена единицы продукции j -го вида равна c_j ден. ед. Требуется:

- 1) симплексным методом найти план выпуска продукции по видам с учётом имеющихся ограничений ресурсов, который обеспечивал бы предприятию максимальный доход. Дать содержательный ответ, вскрыв экономический смысл всех переменных, участвующих в решении задачи;
- 2) сформулировать в экономических терминах двойственную задачу и составить её математическую модель;
- 3) используя решение исходной задачи и соответствие между двойственными переменными, найти компоненты оптимального плана двойственной задачи — двойственные оценки y_i^* ($i=1, 2, 3$);
- 4) указать наиболее дефицитный и недефицитный (избыточный) ресурс, если он имеется;
- 5) с помощью двойственных оценок y_i^* обосновать рациональность оптимального плана, сопоставив оценку затрат $\varphi_{\min}$ израсходованных ресурсов и максимальный доход $f_{\max}$ от реализации готовой продукции по всему оптимальному плану и по каждому виду продукции в отдельности;
- 6) определить величину Δb_s ресурса P_s , введением которого в производство можно компенсировать убыток и сохранить максимальный доход на прежнем уровне (ресурсы предполагаются взаимно заменяемыми), получаемый при исключении из производства Δb_r единиц ресурса P_r , что вызывает уменьшение максимального дохода на $\Delta f_{\max}$ ед.;
- 7) оценить целесообразность приобретения Δb_k единиц ресурса P_k по цене c_k за единицу;
- 8) установить, целесообразно ли выпускать новую продукцию P_l , на единицу которой ресурсы P_1, P_2 и P_3 расходуются в количествах a_{1l}, a_{2l} и a_{3l} единиц, а цена единицы готовой продукции составляет p_l ед.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице.

	Номер варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n	4	3	4	3	3	3	3	4	3	3	4	5	3	3	3
b_1	20	150	280	1200	600	24	500	100	360	180	2	3	400	6000	12
b_2	37	180	80	150	30	10	550	260	192	210	2	2	250	5000	25
b_3	30	120	250	3000	144	6	200	370	180	244	2	2	200	9000	18
a_{11}	2	2	2	15	10	5	2	2,5	18	4	1	1	1/6	1	6
a_{12}	2	3	1	20	20	7	1	2,5	15	2	1	1	3/7	1	4
a_{13}	3	4	1	25	23	4	0	2	12	1	0	1	1/4	1	3
a_{14}	0	—	1	—	—	—	—	1,5	—	—	2	2	—	—	—
a_{15}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—
a_{21}	3	1	1	2	1	5	0	4	6	3	0	0	1/4	1/2	5
a_{22}	1	4	0	3	1	2	2	10	4	1	1	1	1/7	1	3
a_{23}	1	5	1	2,5	1	1	1	4	8	3	1	1	1/4	5	2
a_{24}	2	—	1	—	—	—	—	6	—	—	0	1	—	—	—
a_{25}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—
a_{31}	0	3	1	35	5	2	0	8	5	1	1	1	1/6	1/2	4
a_{32}	1	4	2	60	6	1	1	7	3	2	0	1	1/7	1/2	5
a_{33}	1	2	1	60	6	1	0	4	3	5	1	0	3/8	20	4
a_{34}	4	—	0	—	—	—	—	10	—	—	0	2	—	—	—
a_{35}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—
c_1	11	8	4	300	35	18	3	40	9	10	3	5	120	80	1
c_2	6	7	3	250	60	12	4	50	10	14	7	2	100	100	2
c_3	9	6	6	450	63	8	1	100	16	12	4	8	150	300	3
c_4	6	—	7	—	—	—	—	80	—	—	2	3	—	—	—
c_5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	—	—	—
r	2	3	3	1	3	2	1	2	2	1	2	1	3	2	1
Δb_r	1	2	4	2	3	1	6	6	3	2	0,02	0,04	2	30	2
s	3	1	2	2	2	1	3	1	1	3	1	2	1	3	3
k	2	3	2	2	3	1	1	3	2	1	2	1	3	3	2
Δb_k	3	5	3	5	4	3	8	10	5	7	0,05	0,02	12	20	0,3
c_k	2	2	6	30	10	2	1	5	1	5	3	4	100	1,5	4
l	5	4	5	4	4	4	4	5	4	4	5	6	4	4	4
a_{1l}	8	4	8	18	15	6	2	3	27	4	3	2	11/20	10	7
a_{2l}	4	6	6	4	1	3	1	9	9	5	2	4	11/40	5	12
a_{3l}	8	8	12	50	3	4	4	12	7	8	4	7	11/40	8	9
p_l	40	30	35	400	25	20	5	120	15	30	15	20	150	200	30

	Номер варианта														
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	4	5	4	4	3	3	3	3	3	3	4	3	4	3	3
b_1	1000	3	4	24	12	8	5	12	4	18	34	1	12	4	2
b_2	500	5	3	12	27	18	4	27	7	16	16	2	8	3	3
b_3	1200	4	3	35	6	6	2	6	12	8	22	1	48	3	4
a_{11}	1	1	1	1	2	4	0	2	1	1	2	1	2	1	1
a_{12}	2	2	3	2	1	1	2	1	3	2	4	2	4	3	1
a_{13}	3	3	0	4	6	2	5	6	0	1	1	0	0	0	0
a_{14}	1	6	1	8	—	—	—	—	—	—	5	—	8	1	—
a_{15}	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
a_{21}	2	2	2	3	3	6	2	3	1	2	4	1	7	2	1
a_{22}	1	3	1	5	3	1	4	3	0	1	1	1	2	1	0
a_{23}	0	1	0	1	9	3	2	9	2	1	4	2	2	0	2
a_{24}	0	6	0	0	—	—	—	—	—	—	1	—	6	0	—
a_{25}	0	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
a_{31}	0	3	0	6	2	6	1	2	1	1	2	2	5	0	1
a_{32}	1	1	1	0	1	1	0	1	3	1	3	0	8	1	1
a_{33}	4	2	4	3	2	1	1	2	2	0	1	3	4	4	1
a_{34}	1	6	1	1	—	—	—	—	—	—	2	—	3	1	—
a_{35}	—	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
c_1	2	3	2	0,4	14	24	20	14	3	3	7	3	3	2	1
c_2	40	4	4	0,2	6	4	8	6	8	4	3	1	4	6	1
c_3	10	1	1	0,5	22	8	30	22	5	2	4	4	3	2	1
c_4	15	3	1	0,8	—	—	—	—	—	—	2	—	1	3	—
c_5	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
r	1	1	2	1	1	3	1	1	2	1	2	1	1	3	2
Δb_r	5	0,05	0,02	2	2	2	2	0,5	0,3	0,02	0,1	0,2	0,3	0,05	0,05
s	3	3	1	2	3	1	3	3	1	3	3	3	2	1	1
k	1	3	1	1	3	1	2	1	2	1	2	1	2	3	2
Δb_k	12	0,02	0,01	0,5	0,02	0,05	0,02	0,05	0,02	0,005	0,03	0,005	0,03	0,005	0,002
c_k	15	1,5	0,2	0,02	4	2	5	1,5	2	1,2	1,3	0,2	1,2	0,15	0,3
l	5	6	5	5	4	4	4	4	4	4	5	4	5	5	4
a_{1l}	3	2	1	4	3	5	3	6	3	2	5	2	7	2	1
a_{2l}	2	1	2	2	2	8	5	5	1	3	4	1	5	4	2
a_{3l}	10	2	1	3	4	3	2	8	4	1	7	2	8	3	2
p_l	80	45	15	8	30	25	40	40	12	10	20	8	25	7	5

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 2

Тема: «Транспортная задача»

Вариант 1–10

В пунктах A_i ($i=1, 2, 3$) производится однородная продукция в количествах a_i единиц. Себестоимость единицы продукции в i -м пункте равна c_i . Готовая продукция поставляется в пункты B_j ($j=1, 2, 3, 4$), потребности которых составляют b_j единиц. Стоимости c_{ij} перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j заданы матрицей $[c_{ij}]_{3 \times 4}$. Требуется:

- 1) методом потенциалов найти план перевозок продукции, при котором минимизируются суммарные затраты по её изготовлению и доставке потребителям, при обязательном условии, что продукция пункта, в котором себестоимость её производства наименьшая, распределяется полностью;
- 2) вычислить суммарные затраты $f_{\min}$;
- 3) установить пункты, в которых остается нераспределённая продукция, и указать её объём.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице.

	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	400	750	250	300	450	350	250	200	500	500
a_2	300	200	550	700	200	750	650	500	900	200
a_3	500	550	350	400	350	300	300	300	100	600
c_1	2	4	4	2	3	2	2	4	2	4
c_2	3	3	1	1	5	4	1	5	5	5
c_3	1	1	5	4	1	3	5	2	3	3
b_1	350	450	300	250	150	200	350	150	200	250
b_2	250	300	150	450	300	50	50	450	650	150
b_3	150	350	400	150	50	600	150	50	150	350
b_4	250	250	150	350	400	400	450	250	300	250
c_{11}	2	1	2	3	6	4	5	3	7	4
c_{12}	6	6	6	7	4	5	10	4	7	8
c_{13}	4	5	3	6	8	8	4	8	8	3
c_{14}	7	3	5	4	3	6	6	2	4	7
c_{21}	6	4	8	7	5	4	7	4	6	5
c_{22}	2	3	7	5	1	7	8	1	1	1
c_{23}	7	5	10	4	4	1	10	4	2	6
c_{24}	1	7	5	9	4	2	9	5	7	4
c_{31}	6	5	2	3	7	2	1	9	4	4
c_{32}	10	8	7	6	11	6	5	10	7	6
c_{33}	7	10	5	5	9	4	4	6	5	5
c_{34}	5	4	3	1	6	7	2	5	6	3

Вариант 11–20

На заводах № 1, 2 и 3 производится однородная продукция в количестве a_1 , a_2 и a_3 единиц. При этом затраты на производство единицы продукции на заводах составляют c_1 , c_2 и c_3 ден. ед. Четырём потребителям требуется соответственно b_1 , b_2 , b_3 и b_4 единиц продукции. Расходы c_{ij} по перевозке единицы продукции с i -го завода j -му потребителю известны.

Для полного удовлетворения потребностей необходимо увеличить выпуск продукции.

При этом возможны следующие варианты:

- 1) расширить мощность завода № 1 с дополнительными затратами на единицу продукции, равными Δc_1 ;
- 2) расширить мощность завода № 2 с дополнительными затратами на единицу продукции, равными Δc_2 ;
- 3) наладить выпуск продукции на заводе № 4 с затратами на производство единицы продукции, равными c_4 , и расходами по перевозке единицы продукции, равными соответственно c_{41} , c_{42} , c_{43} и c_{44} .

Требуется:

- 1) методом потенциалов найти оптимальный план расширения производства продукции, при котором полностью удовлетворяется спрос, а совокупные затраты, связанные с изготовлением продукции и её доставкой потребителям, минимизируются;
- 2) определить минимальные совокупные затраты на производство продукции и доставку её потребителям по оптимальному плану расширения выпуска продукции.

Указание. Приведённые в задаче варианты увеличения выпуска продукции рассматривать в ходе решения как самостоятельные пункты производства в едином комплексе с данными пунктами (заводами). Таким образом, в распределительной таблице будет шесть поставщиков готовой продукции.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице.

	Номер варианта									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_1	700	600	300	200	500	800	200	250	600	900
a_2	300	400	600	500	700	300	600	450	450	300
a_3	600	700	1000	300	800	500	500	300	750	600
c_1	5	2	7	6	8	7	6	4	7	5
c_2	7	4	6	3	3	5	4	5	5	3
c_3	4	3	2	5	5	6	7	8	9	4
b_1	350	500	500	350	600	650	150	200	500	450
b_2	550	300	700	150	400	250	400	400	700	150
b_3	250	800	400	250	750	350	350	200	150	750
b_4	650	200	450	450	350	550	700	400	650	550
c_{11}	7	4	4	2	5	3	5	9	7	3
c_{12}	8	2	5	4	2	8	4	3	5	6
c_{13}	7	6	7	3	3	5	2	4	9	4
c_{14}	9	8	9	7	4	4	8	6	3	9
c_{21}	8	5	7	6	3	9	3	3	8	2
c_{22}	5	7	4	8	8	3	2	2	4	5
c_{23}	3	3	9	4	6	7	5	5	3	8
c_{24}	8	9	7	2	5	6	9	3	2'	4
c_{31}	7	4	8	9	6	4	6	4	5	3
c_{32}	4	8	2	5	9	8	2	7	4	7
c_{33}	3	6	3	3	7	3	5	9	6	4
c_{34}	7	2	8	8	2	5	7	6	7	9
Δc_1	6	3	2	4	4	4	4	4	4	3
Δc_2	3	5	6	3	2	6	7	7	5	6
c_4	10	3	11	5	9	6	3	8	6	4
c_{41}	13	7	12	4	8	3	6	9	3	7
c_{42}	13	9	15	6	17	7	4	10	8	2
c_{43}	10	4	8	3	16	4	2	12	2	4
c_{44}	14	2	15	8	10	8	7	16	7	8

Вариант 21–30

Студенческие отряды СО-1, СО-2 и СО-3 численностью в a_1 , a_2 и a_3 человек принимают участие в сельскохозяйственных работах. Для уборки картофеля на полях $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$ необходимо выделить соответственно b_1 , b_2 , b_3 и b_4 человек. Производительность труда студентов зависит от урожайности картофеля, а также от состава отряда и характеризуется для указанных отрядов и полей элементами матрицы $[p_{ij}]_{3 \times 4}$ (в центнерах на человека за рабочий день).

Требуется:

- 1) распределить студентов по полям так, чтобы за рабочий день было убрано максимально возможное количество картофеля;
- 2) определить, сколько центнеров картофеля будет убрано с четырех полей при оптимальном распределении студентов.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице.

		Номер варианта									
		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a_1		40	35	25	20	45	30	25	30	35	20
a_2		30	40	30	45	15	25	35	40	25	35
a_3		25	55	35	25	30	45	50	20	40	55
b_1		15	60	22	30	20	32	30	14	28	36
b_2		35	25	15	14	22	24	18	26	15	32
b_3		21	30	23	26	18	28	40	16	37	24
b_4		24	15	30	20	30	16	22	34	20	18
p_{11}		9	6	8	7	4	9	6	5	7	6
p_{12}		7	5	4	6	5	7	9	8	4	5
p_{13}		5	4	7	9	6	8	6	4	6	9
p_{14}		5	9	6	5	6	4	8	7	5	8
p_{21}		6	4	7	9	6	6	5	9	7	6
p_{22}		8	6	9	5	7	6	9	8	5	4
p_{23}		5	7	8	6	4	7	8	5	6	8
p_{24}		7	5	6	7	9	5	7	9	8	6
p_{31}		9	8	9	4	7	4	5	7	9	9
p_{32}		6	4	7	8	6	7	4	9	4	8
p_{33}		8	9	5	5	8	9	6	8	7	4
p_{34}		5	6	8	9	4	5	8	6	4	7

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 3

Тема: «Дискретное программирование»

Вариант 1–10

На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено b_1 тыс. р. Оборудование должно быть размещено на площади в b_2 кв. м. Предприятие может заказать машины типа A стоимостью a_{11} тыс. р., занимающие площадь (с учётом проходов) a_{21} кв. м. и выпускающие c_1 ед. продукции за смену, и машины типа B стоимостью a_{12} тыс. р., занимающие площадь (с учётом проходов) a_{22} кв. м. и выпускающие c_2 ед. продукции за смену. При этом следует учесть, что машин типа A можно заказать не более b_3 штук. Требуется:

1. составить математическую модель задачи, пользуясь которой, можно найти план приобретения машин, учитывающий возможности предприятия и обеспечивающий наивысшую производительность нового участка;
2. пользуясь одним из методов целочисленного линейного программирования, найти оптимальный план приобретения оборудования.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице.

	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_1	30	20	272	36	80	49	50	48	24	72
b_2	850	660	27	672	5200	2128	3875	2604	984	1968
b_3	4	3	8	5	7	5	9	11	10	7
a_{11}	5	5	17	6	8	7	5	4	2	8
a_{12}	3	2	52	3	5	3	3	3	4	4
a_{21}	85	55	3	32	208	112	155	124	41	82
a_{22}	111	102	3	91	505	228	543	363	322	191
c_1	9	8	6	7	10	10	8	7	4	10
c_2	7	5	9	10	13	12	13	12	14	13

Вариант 11–20

Из Минска в Могилёв необходимо перевезти оборудование трёх типов: b_1 ед. типа A , b_2 ед. типа B и b_3 ед. типа B . Для перевозки оборудования завод может заказать два вида транспорта: T_1 и T_2 . На единицу транспорта вида T_1 оборудования типа A может быть погружено не более a_{11} ед., оборудования типа B — не более a_{21} ед., оборудования типа B — не более a_{31} ед.; на единицу транспорта вида T_2 — не более a_{12} , a_{22} , a_{32} ед. оборудования соответственно типа A , B и B . Сменные затраты, связанные с эксплуатацией единицы транспорта вида T_1 , составляют c_1 ден. ед., единицы транспорта вида T_2 — c_2 ден. ед. Требуется:

1. составить математическую модель задачи, позволяющую установить количество транспортных единиц того и другого вида, необходимое для перевозки оборудования с минимальными затратами;
2. пользуясь одним из методов целочисленного линейного программирования, найти оптимальный план заказа транспорта.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице.

	Номер варианта									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b_1	20	69	555	92	1953	594	22	50	40	138
b_2	40	84	138	128	147	24	560	4060	468	60
b_3	968	1911	135	686	126	105	138	20	20	2090
a_{11}	4	3	111	4	279	27	2	10	8	23
a_{21}	4	21	6	8	7	3	28	290	36	5
a_{31}	44	147	9	98	9	21	23	1	1	95
a_{12}	1	16	28	23	100	158	3	3	2	6
a_{22}	3	4	23	12	21	2	177	357	49	4
a_{23}	177	304	12	39	10	5	6	4	4	276
c_1	6	4	13	12	12	3	4	4	7	6
c_2	10	12	10	11	9	6	9	3	5	10

Вариант 21–30

Для выполнения работ P_1 , P_2 и P_3 сельскохозяйственное предприятие может приобрести тракторы марок A и B стоимостью соответственно c_1 и c_2 ден. ед. каждый. С использованием новой техники необходимо выполнить не менее b_1 условных единиц работы P_1 , не менее b_2 условных единиц работы P_2 и не менее b_3 условных единиц работы P_3 . За рассматриваемый промежуток времени с использованием трактора марки A можно выполнить a_{11} условных единиц работы P_1 , a_{21} работы P_2 или a_{31} работы P_3 ; с использованием трактора марки B — a_{12} условных единиц работы P_1 , a_{22} работы P_2 или a_{32} работы P_3 . Требуется:

1. составить математическую модель задачи, позволяющую найти такой вариант приобретения тракторов той и другой марки, при котором будут выполнены все необходимые работы, а затраты на новую технику будут минимальными;
2. одним из методов целочисленного линейного программирования найти оптимальный вариант приобретения тракторов.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице.

	Номер варианта									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
b_1	20	45	63	77	2020	1357	92	60	3025	138
b_2	190	138	147	40	104	84	3712	1128	140	8460
b_3	88	1215	588	138	20	39	56	105	20	110
a_{11}	4	9	9	7	404	59	4	3	605	23
a_{21}	19	6	7	2	8	21	232	141	10	705
a_{31}	4	81	42	23	1	3	8	21	1	5
a_{12}	1	2	3	12	105	318	23	14	186	6
a_{22}	15	23	21	12	10	4	357	98	12	574
a_{32}	15	118	49	6	4	6	3	5	4	14
c_1	3	4	8	1	4	2	24	6	8	3
c_2	5	3	6	2	3	6	22	12	6	5

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 4

Тема: «Выпуклое программирование»

Предприятие выпускает изделия A и B , при изготовлении которых используется сырьё C_1 и C_2 . Известны запасы b_i ($i=1, 2$) сырья, нормы a_{ij} ($j=1, 2$) его расхода на единицу изделия, оптовые цены p_j на изделия и их плановая себестоимость c_j^0 . Как только объём выпускаемой продукции перестаёт соответствовать оптимальным размерам предприятия, дальнейшее увеличение выпуска x_j ведёт к повышению себестоимости продукции и в первом приближении фактическая себестоимость c_j описывается функцией $c_j = c_j^0 + c_j' x_j$, где c_j' — некоторая постоянная величина. При поиске плана выпуска изделий, обеспечивающего предприятию наивысшую прибыль в условиях нарушения баланса

между объёмом выпуска и оптимальными размерами предприятия, целевая функция принимает вид $f = (p_1 - (c_1^0 + c_1'x_1))x_1 + (p_2 - (c_2^0 + c_2'x_2))x_2$, а ограничения по сырью $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Требуется:

1. составить математическую модель задачи применительно к числовым данным выполняемого варианта;
2. графическим методом решить полученную задачу и сформулировать ответ в экономических терминах в соответствии с условиями задачи.

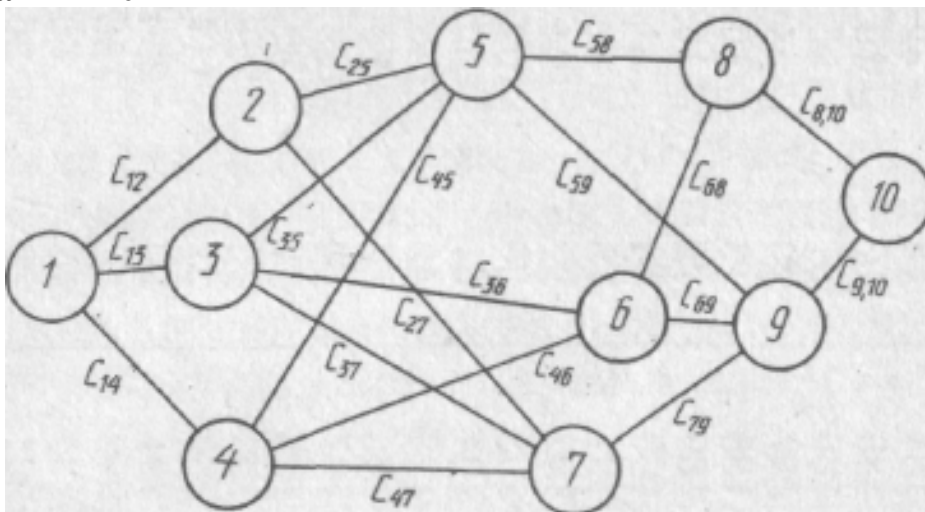
Все необходимые числовые данные приведены в таблице.

Номер варианта	b_1	b_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	p_1	p_2	c_1^0	c_2^0	$c_1' = c_2'$
1	90	88	13	6	8	11	12	10	7	8	0,2
2	30	60	5	2	8	11	8	7	6	4	0,1
3	60	10	11	8	1	2	10	11	7	9	0,1
4	14	42	1	4	7	3	15	13	14	11	0,2
5	7	10	1	1	1	2	12	11	9	10	0,2
6	51	105	5	13	15	7	15	13	13	10	0,1
7	40	84	4	7	12	7	11	17	9	14	0,2
8	13	10	2	3	2	1	14	16	12	13	0,2
9	72	10	9	8	1	2	23	19	20	13	0,3
10	84	31	7	12	5	3	21	27	15	24	0,3
11	15	52	2	1	4	13	8,6	5,4	5	4,6	0,2
12	22,5	104	3	1,5	8	26	5	4	2,25	3,25	0,125
13	30	102	4	2	6	17	12	14	8	12	0,2
14	51	105	3	8,5	14	7	12	8	5	4,5	0,25
15	45	136	6	3	8	17	13	12	7,4	7,2	0,4
16	7,5	68	1	0,5	4	8,5	12,75	16	10	14	0,125
17	60	125	8	4	11	15	8	9	4,8	5,4	0,2
18	12	82,5	1,6	0,8	5,5	7,5	17	22,5	11	17	0,25
19	75	228	10	5	12	19	12	20	6,4	11,2	0,4
20	37,5	114	5	2,5	6	9,5	15,5	21,75	12,75	18,5	0,125
21	90	260	12	6	13	20	6	8	3,6	2,8	0,2
22	22,5	130	3	1,5	6,5	10	17	18,5	12	11	0,25
23	12	60	1	2	10	6	5	8	2,6	2,4	0,4
24	18	30	1,5	3	5	3	6,25	6,25	5	4	0,125
25	24	80	2	4	10	8	21	18,6	19	16,2	0,2
26	30	40	2,5	5	5	4	4	7	1	3	0,25
27	36	10	3	6	1	1	8	6	2,4	2	0,4
28	42	20	3,5	7	2	2	4	2,25	2	0,5	0,125
29	48	140	4	8	14	10	15,6	23,8	12	22,2	0,2
30	54	70	4,5	9	7	5	9	5	4	2	0,25

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 5

Тема: «Динамическое программирование»

Вариант 1–10



На данной сети дорог имеется несколько маршрутов, по которым можно доставлять груз из пункта 1 в пункт 10. Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы груза между пунктами сети. Требуется:

1. методом динамического программирования найти на сети наиболее экономный маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 10 и соответствующие ему затраты;
2. выписать оптимальные маршруты перевозки груза из всех остальных пунктов сети в пункт 10 и указать отвечающие им минимальные затраты на доставку.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице.

Тариф	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_{12}	7	4	9	1	5	8	3	6	1	4
c_{13}	3	8	2	6	3	1	5	2	9	6
c_{14}	5	4	5	2	8	5	4	6	3	1
c_{25}	2	6	3	5	2	9	1	7	8	3
c_{27}	7	1	7	3	5	2	6	3	7	5
c_{35}	9	9	4	6	8	6	2	9	4	7
c_{36}	3	3	6	8	1	8	7	2	9	3
c_{37}	1	5	8	4	7	4	4	8	3	6
c_{45}	8	4	1	7	5	5	6	5	7	2
c_{46}	4	8	3	2	9	2	8	2	4	5
c_{47}	5	2	5	9	1	6	3	9	8	9
c_{58}	2	7	8	5	3	1	7	4	6	1
c_{59}	6	4	7	3	5	8	2	6	3	8
c_{68}	1	9	1	6	8	3	9	7	1	2
c_{69}	9	6	4	1	4	6	2	4	8	3
c_{79}	4	1	5	4	9	2	8	6	1	5
$c_{8,10}$	3	7	9	6	2	5	1	7	9	3
$c_{9,10}$	8	2	5	1	7	9	3	6	4	8

Вариант 11–20

Для реконструкции и модернизации производства на n предприятиях выделены денежные средства c . По каждому из n предприятий известен возможный прирост $g_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$) выпуска продукции в зависимости от выделенной ему суммы x ($0 \leq x \leq c$). Требуется:

1. распределить средства c между предприятиями так, чтобы суммарный прирост выпуска продукции на всех n предприятиях достиг максимальной величины $f_n(c)$ (этот основной результат задачи получить для $c=100$ млн. р. и $n=4$);
2. используя выполненное решение основной задачи, найти: а) оптимальное распределение 100 млн. р. между тремя предприятиями; б) оптимальное распределение 80 млн. р. между тремя предприятиями.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице.

Номер варианта	Предприятие	Прирост выпуска продукции на i -м предприятии $g_i(x)$, млн. р.	Часть средств, выделяемых предприятиям, млн. р.				
			20	40	60	80	100
11	№ 1	$g_1(x)$	9	18	24	38	50
12			9	17	29	38	47
13			7	29	37	41	59
14			9	20	35	44	57
15			9	18	29	41	60
16			11	21	40	54	62
17			12	26	40	60	72
18			14	24	37	45	58
19			16	28	36	49	60
20			12	28	39	47	69
11	№ 2	$g_2(x)$	11	19	30	44	59
12			11	34	46	53	75
13			9	19	28	37	46
14			12	25	34	46	57
15			8	19	30	47	58
16			13	20	42	45	61
17			16	21	36	49	63
18			12	30	42	58	71
19			10	29	42	50	74
20			14	26	40	51	68
11	№ 3	$g_3(x)$	16	32	40	57	70
12			13	28	37	49	61
13			17	27	37	48	66
14			11	20	32	48	61
15			12	25	51	58	69
16			12	22	34	55	60
17			9	17	35	51	65
18			13	25	45	62	70
19			15	27	46	58	65
20			11	24	43	51	68

11	№ 4	$g_4(x)$	13	27	44	69	73
12			12	35	40	54	73
13			16	30	42	65	81
14			14	23	40	50	58
15			7	15	52	59	60
16			10	27	33	57	69
17			15	25	51	62	76
18			7	33	46	60	68
19			17	23	38	53	67
20			16	21	36	49	72

Вариант 21–30

В начале планового периода продолжительностью в N лет имеется оборудование возраста t . Известны стоимость $r(t)$ продукции, производимой в течение года с использованием этого оборудования; ежегодные расходы $u(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования; его остаточная стоимость s ; стоимость p нового оборудования (сюда же включены расходы, связанные с установкой, наладкой и запуском оборудования). Требуется:

1. пользуясь функциональными уравнениями, составить матрицу максимальных прибылей $f_n(t)$ за N лет;
2. сформировать по матрице максимальных прибылей оптимальные стратегии замены оборудования данных возрастов t и t_1 лет в плановом периоде продолжительностью соответственно N и N_1 лет.

Все необходимые числовые данные приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

	Номер варианта									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
N	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
N_1	8	6	7	8	6	9	8	7	9	6
t	7	7	8	6	8	7	6	9	6	9
t_1	1	4	5	5	4	6	5	4	8	3
s	0	2	2	0	3	0	5	2	0	1
p	10	11	14	10	10	8	17	12	6	13

Таблица 2

Номер вариан- та	Параметр	Возраст оборудования t											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
21	$r(t)$	20	20	20	19	19	18	18	17	17	16	15	
22		22	22	21	21	21	20	20	19	19	19	18	
23		25	24	24	23	22	21	21	21	21	20	20	
24		28	27	27	26	25	25	24	23	23	22	21	
25		21	20	19	19	18	18	17	16	16	15	15	
26		24	24	24	23	23	22	21	21	21	20	20	
27		28	27	26	25	24	24	23	22	22	22	21	
28		20	20	19	18	17	16	16	15	15	14	13	
29		26	25	25	24	24	23	23	23	22	2	21	
30		23	23	22	22	21	20	20	20	19	18	18	

21	$u(t)$	10	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15
22		12	13	13	14	15	15	16	16	17	18	18
23		13	13	14	15	15	16	16	17	18	19	20
24		16	16	17	17	17	18	18	19	20	20	21
25		11	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15
26		13	14	15	16	17	17	17	18	19	19	20
27		15	15	16	17	17	18	19	20	20	21	21
28		8	9	9	10	10	10	11	11	12	13	13
29		15	15	16	16	17	17	18	19	19	20	21
30		11	12	13	14	14	15	16	17	17	17	18

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.

Основная литература:

1. Новиков, А. И. Экономико-математические методы и модели : учебник / А. И. Новиков. — Москва : Дашков и К, 2017. — 532 с. — ISBN 978-5-394-02615-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/77298>
2. Кундышева, Е. С. Математические методы и модели в экономике : учебник / Е. С. Кундышева. — Москва : Дашков и К, 2017. — 286 с. — ISBN 978-5-394-02488-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/91232>

Дополнительная литература:

1. Гетманчук, А. В. Экономико-математические методы и модели : учебное пособие / А. В. Гетманчук, М. М. Ермилов. — Москва : Дашков и К, 2017. — 186 с. — ISBN 978-5-394-01575-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/93509>
2. Косников, С. Н. Математические методы в экономике : учебное пособие для вузов / С. Н. Косников. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 170 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04098-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/492109>

Периодические издания:

1. Вопросы экономики : научно-практический журнал; всероссийское экономическое издание / учредитель : ООО «Редакция журнала «Вопросы экономики»; Институт экономики РАН. — Москва : 1926 — .— Ежемес. — ISBN печатной версии 0042-8736. — Текст : электронный // ЭБС elibrary [сайт]. — URL : <https://elibrary.ru>
2. Российский экономический журнал : науч.-практ. журнал / учредители : ЗАО "ЭЖ МЕДИА" . — Москва : Академия менеджмента и бизнес-администрирования, 1991 — .— Выходит 6 раз в год. — ISBN печатной версии 0130-9757. — Текст : электронный // ЭБС elibrary [сайт]. — URL : <https://elibrary.ru>
3. ВЕСТНИК ВОРОНЕЖСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. СЕРИЯ: ЭКОНОМИКА И УПРАВЛЕНИЕ: научный журнал / учредители : "Воронежский государственный университет". — Воронеж : 2003. — .— Выходит 4 раз в год. ISBN печатной версии 1814-2966 — Текст : электронный // ЭБС elibrary [сайт]. — URL : <https://elibrary.ru>

Учебное издание

Ольга Станиславовна Кравцова

Математические методы в экономике

Учебно-методическое пособие по курсу
«Математические методы в экономике»
направления 38.03.01 «Экономика»
заочной формы обучения

Технический редактор: О.С. Кравцова
Компьютерный набор и верстка: О.С. Кравцова

Подписано к печати_____Формат_____
Условных печатных листов_____тираж_____заказ_____

Отпечатано с авторского оригинала в редакционно-издательском
отделе

СОФ МГРИ
Старый Оскол, ул. Ленина, 14